

UNIVERSITY OF DELHI



ARTS LIBRARY

ARTS LIBRARY
(DELHI UNIVERSITY LIBRARY SYSTEM)

Cl. No. B32

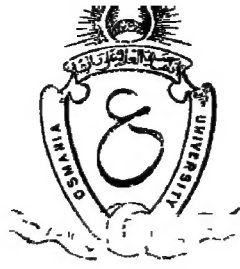
1688126.2

Ac. No. 3805

Date of release for loan

This book should be returned on or before the date last stamped below.
An overdue charge of Rupee one will be charged for each day the
book is kept overtime.

(Authority: E.C. Res. 200 dated 27th August 1996).



سلسلہ رسائل علمیہ

احصا کا ابتدائی رسالہ

حصہ دوم

مع توضیحات از علم ہندسہ، علم حیل، و طبیعیات
مُصَنَّف

جلیح اے گبن ایم۔ اے۔ ایل۔ ایل ڈی۔ ایف اے آر ایس اے
جس کا

قاضی محمد حسین صاحب ایم۔ اے

پروفیسر کلیہ جاسمہ عثمانیہ سرکار عالی نے اردو میں ترجمہ کیا
۱۳۲۶ھ م ۳۴ ستمبر م ۲۸ جولائی ۱۹۰۶ء

طبع و اشاعت دارالکتاب

517
Q 321 M

3805-

یہ کتاب سر سزیکسل اینڈ کمپنی کی اجازت سے
جن کو حق اشاعت حاصل ہے اردو میں
ترجمہ کر کے طبع و شائع کی گئی ہے۔

دینا چاہئے مترجم

احصا کے ابتدائی رسالہ مصنفہ گکسن کا ترجمہ اردو میں حسب منظوری مجلس ریاضی و سائنس بی۔ اے کی جماعتوں کے لئے کیا گیا ہے۔ مبتدیوں کے لئے انگریزی زبان میں یہ مفید کتاب ہے، احصا کے اطلاق کے متعلق طبیعی، جیلی و ہندسی مسائل کی کثیر تعداد اس میں موجود ہے۔ ترجمہ تحت لفظی ہے کوئی ترمیم اصل پر نہیں کی گئی۔ کتاب کی ضخامت کی وجہ سے اس کو دو حصوں میں تقسیم کر دیا گیا ہے، ورنہ مضمون بالکل مسلسل ہے، جہاں تکمیل کی باضابطہ بحث شروع ہوتی ہے، وہاں سے حصہ دوم کی ابتدا کی گئی ہے۔ اس کتاب میں تفرق اور تکمیل میں کوئی خطا حاصل نہیں پیدا کیا گیا اور نہ ہی ہونا چاہئے، ایک نقطہ نظر سے مکمل تفرق کا الٹ ہے، اس لئے جہاں معیاری ضابطے تفرق کے حامل کئے جاتے ہیں وہاں تکمیل کی معیاری صورتیں بھی پیدا ہوتی ہیں، ٹھیک اس موقع پر طالب علم کو ان دونوں اعمال سے تماس پیدا کر لینا چاہئے۔

مجوزہ ترقیم اصطلاحات کی فہرست اس کتاب کے ساتھ منسلک ہے، احصا کی علامات و رموز اساسی اہمیت رکھتی ہیں اور کثرت سے اعلیٰ ریاضی اور سائنس کے ہر شعبہ میں استعمال ہوتی ہیں، اس لئے ترقیم و علامات کا مناسب انتخاب اور ان کے لحاظ سے پوری یکسانیت ریاضی اور سائنس کی تمام شاخوں میں ضروری ہے۔ اس کتاب کے مطبع میں جانے کے بعد سائنس ترقیم کمیٹی جامعہ عثمانیہ نے

انگریزی و یونانی حروف کے لئے مائل عربی حروف اختیار کئے ہیں جن کے
ساتھ مطابقت آئندہ سے سائنس کے تمام شعبوں میں لازمی ہوگی، ان کی
فہرست حوالہ کے طور پر یہاں دی جاتی ہے، براہ کرم اس کتاب کی تفصیلی تقسیم
کو ان حروف کی مطابقت سے پڑھا جائے۔

منہج

مفرد حروف انگریزی دیوانی کے ماثل مجوزہ حروف۔

A	B	C	D	E	F	G	H
ا	ب	ج	د	ع	ف	گ	ح
I	J	K	L	M	N	O	P
آ	ث	ک	ل	م	ن	ط	پ
Q	R	S	T	U	V	W	X
ق	ر	س	ت	ع	و	ھ	خ
Y	Z						

انگریزی کے بڑے (Capital) حروف بخط عربی لکھے جائیں گے
اور چھوٹے حروف بخط فارسی۔ نیز بڑے حروف عربی لکھے جائیں گے اور ان کے
لیکھنا نہ بھی بڑا ہوگا۔

a	b	c	d
ا	ب	ج	د
A'	B'	C'	D'
ا'	ب'	ج'	د'
A ₁	B ₁	C ₁	D ₁
ا ₁	ب ₁	ج ₁	د ₁

Α Β Γ Δ Ε Ζ Η Θ

طہ یہ شہ صہ ضہ جہ بہ عہ

Ι Κ Λ Μ Ν Ξ Ο Π

پہ بھ ظہ نہ سہ لہ کہ حہ

Ρ Σ Τ Υ Φ Χ Ψ Ω

سہ پھ خہ فہ چہ ٹہ شہ یغہ

یونانی بڑے حروف کے لئے آخر میں ہل کی بجائے اولکھا جائے گا

جیسے عا، با، جا،
.

ریاضی کا پتہ

گزشتہ چند سالوں میں علمی سائنس کی تمام شاخوں میں بجد ترقی ہوئی ہے۔ جس کی وجہ سے طالب علم کے اوقات پر بوجھ بہت بڑھ گیا ہے، اس لئے بعض لوگوں کا خیال ہے کہ ریاضی کتب نصاب کی نوعیت میں تبدیلی کی ضرورت ہے۔ اس لحاظ سے کئی کتب ریاضی شائع ہوئی ہیں جو طلبہ کی خاص خاص جماعتوں کے لئے موزوں کی گئی ہیں، ان میں صرف اتنی اور اس قسم کی ریاضی مندرج ہوتی ہے جو صرف ان طلبہ کی اغراض کو پورا کرے۔

اس تبدیلی کے حق میں جو دلائل اکثر بیان کئے جاتے ہیں ان میں سے بعض کے ساتھ ہمیں دلی ہمدردی ہے۔ لیکن یہ ہمیشہ سے درست ہے اور آج بھی درست ہے کہ ریاضی سیکھنے کے لئے کوئی شاہ راہ نہیں ہے اور بغیر جانسوز کوشش کے اس علم کی کوئی مفید کار تحصیل نہیں ہو سکتی۔

بعض اوقات یہ کہا جاتا ہے کہ اگر طالب علم سادہ قوتوں، قوت نمائی اور لوکاری تفاعلوں اور شاید حیب اور حیب التمام کے مشقوں اور مکملوں کے ساتھ پوری واقفیت رکھتا ہو تو فن انجینیری کے لئے علم احصائی استعداد کافی ہے۔ اس بیان میں سچائی کی بڑی مقدار موجود ہے، تاہم یاد رہے کہ اگر محض نتائج کے اقتباس اور استعمال کی حد سے زیادہ استعداد مطلوب ہو تو یہ ان چند اسباق سے حاصل نہیں ہو سکتی جو العموم ابتدائی اصولوں کی تشریح کے لئے کافی خیال کئے جائیں۔

یہ شاید ممکن ہے کہ چند سبقوں میں احصا کے خاص نتائج کی کافی مقدار بیان کر دی جا سکے اور ان کی توضیح بھی کر دی جائے اور ان کی مدد سے طالب علم حلی اور طبیعی مسائل کی ابتدائی بحث کو ایک حد تک بخوبی سمجھ سکے، لیکن احصا کا استقدر سطحی کورس اگرچہ فائدہ سے خالی نہیں مگر ہر دو مقدار اور نوعیت کے لحاظ سے یہ اس قسم کے عملی مضامین کے برجستہ مطالعہ کے لئے مطلق کافی نہیں ہے جیسے متبادل برقی رو کا نظریہ، حرکیات، حرکت سیالات، پچک کا نظریہ وغیرہ وغیرہ اور جس طالب علم کی بنیاد محض مندرجہ بالا کورس پر رکھی گئی ہے اس کے لئے طبیعیات اور کیمیا کے جدید معلومات اور مضامین تک رسائی محال ہوگی۔ علاوہ اس کے ہر دورانیہ تعلیمی اسکیم کا یہ مقصد ہونا چاہئے کہ طالب علم اپنے مذاق کے خاص فن میں بذات خود تحقیق و تجسس کرنے کے قابل ہو جائے، جدید سائنس کے ہنریت پیچیدہ مسائل اور استقدر تفصیل جو اس کے ساتھ مخصوص ہے ان سب کی بنا پر یہ کچھ کم لازم نہیں آتا کہ ریاضی کی تعلیم میں بخل سے کام نہ لیا جائے۔ اس امر کے مد نظر کہ طالب علم کو بالآخر کسی ایک خاص فن میں مہارت حاصل کرنا ہے یہ اور بھی ضروری معلوم ہوتا ہے کہ ابتدائی منزلوں میں اس کی ریاضی کی تعلیم بالکل وہی ہو خواہ بعد میں وہ خالص ریاضی کی تحصیل میں اپنا پورا وقت لگانا چاہئے یا سائنس کی زیادہ علمی شاخوں میں۔ اور یہ خاص طور پر ضروری ہے کیونکہ تخیل کے اعمال جو کسی حلی، طبیعی یا کیمیائی منظر کے پیچیدہ مطالعہ میں شامل ہوتے ہیں وہ ان اعمال کے ساتھ بہت کچھ لگاؤ اور اشتراک رکھتے ہیں جو احصا (کیلکولس) کی تعلیم میں منکشف ہوتے ہیں۔

ابتداء میں احصا پر جو کتابیں لکھی گئیں جیسے مگلارن اور سمسن کے رسالے وہ صرف خالص ریاضی دانوں کے لئے ہی تصنیف نہیں کی گئی تھیں، بلکہ اکثر ان کی توضیحات طبیعی فلسفہ سے حاصل کی گئی تھیں، بعد میں شاید طبیعیات کی وسعت کے بڑھ جانے سے ایسی کتابوں میں احصا کا طبیعی استعمال کم ہوتا گیا اور احصا کی کتابیں ایک حد تک اعلیٰ ہندسہ کے رسالے بن گئے۔ علم ریاضی کی موجودہ صورت حال یہ ہے کہ احصا کی کتابوں کو نہ اعلیٰ ہندسہ کی کتب نصاب بن جانا چاہیئے اور نہ ہی ان کے لئے طبیعیات، انجینئرنگ یا کیمیا کی کتابیں بن جانا درست ہے۔

احصا کے ابتدائی رسالہ سے جو معقول امید کی جا سکتی ہے وہ یہ ہے کہ یہ طالب علم کو احصا کے اصولوں اور اعمال کو انسانی کے ساتھ اپنے ایسے مطالبات میں لگانے کے لئے تیار کرے جن میں احصا عام طور پر استعمال ہوتا ہے۔ اس غرض کو پورا کرنے کے لئے احصا کے مضمون کی توضیح علوم ہندسہ، جیل اور طبیعیات سے ہونی چاہئے جبکہ ان فنون کی ذاتی اور خصوصی مشکلات کو خاص کتب نصاب میں تفصیلی بحث کے لئے جگہ دیا جائے اور یہ توضیحات اپنا اصل مقصد صرف عام اصولوں پر روشنی ڈالنے کا پورا کریں اور ذہنی مشکلات کو رفع کرنے کی بجائے انہیں اور پیدا نہ کر دیں۔ علم کیمیا کے متعلق یہ کہا جا سکتا ہے کہ احصا کے پختہ علم کی اس میں خاص ضرورت ہے کیونکہ کیمیا کی تحقیقات میں ایک سے زیادہ متغیروں کے تفاضلوں کے خواص زیادہ تر استعمال ہوتے ہیں۔

حال میں (Van Laar) کی کتاب (Lehrbuch der Mathematischen Chemie) اس قسم کی تعینات کا پیش خیمہ ہے جن سے قطع نظر نہیں ہو سکتی۔ [Chemie] اس میں مذکورہ بالا مقاصد کو حاصل کرنے کی کوشش کی گئی ہے طالب علم کی ریاضی قابلیت کے متعلق صرف اتنا فرض کر لیا گیا ہے کہ وہ اس کتاب کے مطالعہ سے پیشتر ہندسہ کے ان مقالوں سے واقف ہے جو اکثر پڑھے جاتے ہیں۔ نیز اس کی استعداد جو مقابلہ میں مسئلہ ثنائی ٹنک ہے اور ستوی علم مثلث میں مسئلہ جمع تک (متف (خیالی) اعداد کو اس کتاب میں استعمال نہیں کیا گیا اور نہ ہی لائٹنا ہی سلسلوں کے علم کو پہلے سے تسلیم کر لیا گیا ہے۔ جدید ریاضی کی باریکیوں کو دیدہ دانستہ جگہ نہیں دی گئی کیونکہ نہ تو وہ مبتدی کے لئے مفید ہیں اور نہ ہی اس کی سمجھ میں آ سکتی ہیں۔ ہندسی تخیلات کی طرف متواتر توجہ دلائی گئی ہے اور ساتھ ہی فن کی طبیعی پیدائش کو پیش نظر رکھا گیا ہے۔

شروع کے ابواب میں بہت سا مواد ہے جو نفس مضمون سے تعلق نہیں رکھتا لیکن ترتیموں اور کائیوں کا نظریہ اس قدر اہمیت رکھتا ہے اور اس قدر نامکمل طور پر پیش کیا جاتا ہے کہ اس کا تذکرہ اس کتاب میں ضروری خیال کیا گیا۔ ہندسہ تجلیلی کے اصولوں کو جہاں تک وہ احصا کے استعمال اور اس کے مینادی اصولوں کی

تشریح کے لئے حقیقی طور پر کارآمد ہو سکتے ہیں میں نے بہت تامل کے ساتھ اس کتاب کے متن میں شریک کیا۔ ہندو میں احصا کے کثیر استعمال سے اگر قطع نظر کی جائے تو احصا کی تعلیم میں محدودوں کے ہندو کے وسیع علم کی چنداں ضرورت نہیں معلوم ہوتی۔ مجھے امید ہے کہ اس ہندو کے ابتدائی اصولوں کی کافی تشریح کر دی گئی ہے جو بہت سے طلبہ کی عملی ضروریات کو پورا کرے گی، اعلیٰ مستوی مخنیات اور سطحوں کے نظریہ کی بحث کو میں نے اس کتاب میں جگہ نہیں دی کیونکہ میری رائے میں یہ بحث ابتدائی رسالہ کے موزوں نہیں۔

دوسری جدت اس کتاب میں مساواتوں کے نظریہ کا باب ہے، اس جدت کی صرف اس لئے ضرورت نہیں محسوس ہوئی کہ اس سے احصا کی علم حساب سے توضیح ہوتی ہے بلکہ اس لئے بھی کہ عملی نقطہ نظر سے یہ مضمون بڑی اہمیت رکھتا ہے اور ابتدائی مساواتوں کی بحث پر بہت کم ابتدائی کتابیں موجود ہیں۔

مضمون کی اس عام ترتیب اور ارتقا کو میں نے کئی سالوں سے اپنی جماعتوں کی تدریس میں استعمال کیا ہے، شرح اور انتہا کے تخیلات کی بحث قدرے طولانی ہے لیکن جلیبی یا طبعی سوالات میں احصا کے استعمال کی خاص مشکلات کا مقابلہ کرنے کے لئے تجربہ کی بنا پر میں نے اس طرز عمل کو نہایت سودمند پایا ہے، اگر یہ تخیلات بطورے طور پر سمجھ میں آجائیں تو بعد کی ترقی زیادہ سریع اور یقینی ہوتی ہے۔ تفرق اور تنجمل کے درمیان کوئی خاص خط فاصل نہیں کھینچا گیا اور تکمیل کے کئی ضروری نتائج اس شاخ کا تفصیلی مطالعہ شروع کرنے سے پہلے حاصل کئے گئے ہیں۔ دسویں باب میں قبول اور مشتق و مخلی مخنیات کی جو بحث درج کی گئی ہے اس سے محدود تنجمل کی ہندی تعریف کے لئے ایک حد تک تسلی بخش بنیاد پیدا کرنا ہی مقصود نہیں ہے بلکہ تریسمی تنجمل کے ایک طریقہ کی توضیح کرنا بھی ہے جو انجینیروں کے لئے اہمیت رکھتا ہے اور خالص نظری بحث میں بھی فائدہ سے خالی نہیں۔

حال کی ترتیب نصاب کی طرح ٹیکس کے مسئلہ کی بحث بہت بعد میں لائی گئی ہے، ابتدائی منزلوں میں اوسط قیمت کا مسئلہ کافی ہے سلسلوں کے استنتاج اور تسلسل کے متعلق ایک حد تک بیضا مسائل اس کتاب کے آخر کی طرف بحث میں

لائے گئے ہیں۔ تاہم مضمون کی بحث ایسی ہے کہ جو سادہ معمولی ترتیب کو زیادہ پسند کریں وہ فوراً مسئلہ اوسط قیمت سے لامتناہی سلسلوں اور ٹیلیس کے مسئلہ ابواب پنجم و ششم حصہ دوم کا مطالعہ کر سکتے ہیں۔

ایک سے زیادہ متغیروں کے تفاعل اس قدر تفصیل سے بحث میں نہیں لائے گئے جیسے ایک متغیر کے تفاعل۔ تاہم ان کے نظریہ کے وہ حصے منتخب کر کے پیش کرنے کی کوشش کی گئی ہے جو طبعی عملیات میں خاص اہمیت رکھتے ہیں۔ کتاب کے اخیر میں ایک چھوٹا سا باب معمولی تفرقی ساداتوں پر ہے جن سے ساداتوں کے ایسے نمونوں کی توضیح ہوتی ہے جو اکثر عام حرکت، طبیعیات، جلی اور برقی انجینئرنگ میں پائے جاتے ہیں۔

اکثر حصوں کے ساتھ سادہ مشقیں درج ہیں، مثالوں کے ان مستند مجموعوں میں کئی مسئلے اور نتائج ایسے ملینگے جن کے لئے کتاب کے متن میں جگہ نہیں مل سکتی تھی لیکن اہمیت کے لحاظ سے ان کا بالتصریح بیان کیا جانا ضروری تھا۔ طالب علم کی حوصلہ افزائی کے لئے کہ وہ اپنے تئیں اس شوق و محنت میں ڈالے جو احصا کے استعمال میں سہولت و اعتماد حاصل کرنے کے لئے قطعی طور پر لازمی ہے مین نے زیادہ ضروری مسئلہ کے حل کے متعلق بلا تکلف اشارے درج کئے ہیں۔

اس کتاب کی تیاری میں کئی رسالوں کے مطالعہ کرنے کا موقع ہوا اور جہاں کہیں جان بوجھ کر کوئی طرز تشریح اختیار کی گئی ہے جو کسی خاص مصنف کے ساتھ مخصوص ہے اس کا احتیاط سے مناسب اعتراف کر دیا گیا ہے، لیکن جب کوئی شخص ساہلہ سال سے ایک مضمون پڑھا رہا ہو اس کے لئے اپنے علم کے تمام ماحذوں کا شانت کر لینا دشوار ہے، پس ممکن ہے کہ مین نے زیادہ وسیع طور پر اقتباس کیا ہو جس کا مجھے علم نہ ہو۔

جارج، اے، گلسن
گلاسگو ستمبر ۱۹۰۱ء

دو سرے ایدیشن کا دیباچہ

اس ایدیشن کے لئے کوئی خاص تبدیلیاں پہلے ایدیشن پر نہیں کی گئیں، تاہم اس میں دو بابوں کا اس غرض سے اضافہ کر دیا گیا ہے کہ یہ کتاب ریاضی طبعیات کے طلبہ کے لئے زیادہ مفید بن جائے۔ علامت پیمائش کے اندر اعمال کی بحث میں مین نے (M Charles J. de la Vallée Poussin) کا طریقہ اختیار کیا ہے جو اس نے اپنے مکتوب (Etude des intergrals a limites infinies) میں درج کیا ہے، میری رائے میں اس طریقہ کے اندر سادگی اور صحت نمایاں حد تک موجود ہیں۔ یہ امید کی جاتی ہے کہ فزکس کے سلسلوں کا باب اس مضمون کے لئے کافی تمہید ثابت ہوگا لیکن اس امر کی کافی زور سے سفارش نہیں کی جاسکتی کہ طالب علم خود ان دلچسپ صفحات کا مطالعہ کرے اور ان پر پورا عبور حاصل کرے جن میں خود فی سیریس اختیاری تفاعل کو موسیقی سلسلوں سے تعبیر کرنے کے عمل کو تکمیل تک پہنچاتا ہے۔

جارج، اے، گبسن

گلاسگو نومبر ۱۹۰۵ء

پہلے مطالعہ کیلئے ہدایات

ابتدائی احصا کے مطالعہ میں ذیل کی ترتیب اختیار کر سکتے ہیں۔
باب اول تا چہارم۔ پنجم دفعات ۴۴ تا ۴۸ ششم، ہفتم دفعہ ۶۷ (شوق ۱۴ سوالات
آتا ۴ اور ۱۱ تا ۱۴) ہفتم دفعات ۴۷ تا ۶۷ (شوق ۱۶ اور ۱۶ ب) دفعہ ۷۸
(شوق ۱ سوالات آتا ۶) اس کو کس میں جبریہ تفاعلوں کے اساسی خواص
معہ ان کے دلچسپ استعمال کے شامل ہیں۔
باب پنجم دفعات ۴۸-۵۰ ہفتم، ہشتم اور باقی حصہ باب نہم، دہم اور باب اول
تا سوم، حصہ دوم۔
ابواب آتا ۱۰ پر پورا ملکہ حاصل کر لینے کے بعد ابواب یازدہم، دوازدہم
باب چہارم تا ہفتم حصہ دوم کا مطالعہ کیا جائے جیسے ضرورت محسوس ہو جب
تکمیل کے اعمال میں کچھ استعداد حاصل ہو جائے تو اس کے بعد فوراً آٹھواں
باب، حصہ دوم شروع کر دیا جاسکتا ہے۔

فہرست مضامین

حصہ دوم

صفحہ	مضمون	دفعہ
	باب اول	
	تکمیل	
۱	تکمل - نامحدود اور محدود تکمل کا مشتق	۱
۲	معیاری صورتیں	۲
۴	جبریہ اور مشلتی تحوّلیں	۳
۱۱	مشق ۱	
۱۳	متغیر کی تبدیلی	۴
۱۵	متغیر بننے کی مثالیں	۵
۱۸	دوسرے درجہ کے تفاعل	۶
۲۱	مثلی اور زائد می ابدال	۷
۲۲	مثلی تکمل	۸

۲۵	مشق ۲	
۲۸	تکمل بالخصص	۹
۳۱	متواتر تحویل - تکملہ $\frac{4}{3}$ ج ب لا جم لا فر لا	۱۰
۳۸	مشق ۳	
۴۲	جزوی کسور	۱۱
۴۶	منطق تفاعلوں کا تکمل	۱۲
۴۷	غیر منطق تفاعل	۱۳
۵۰	عام مشاہدات	۱۴
۵۱	مشق ۴	
	باب دوم	
	محدود تکملے - ہندی سوا لائیں ان کا استعمال	
۵۴	محدود تکملہ - مسائل	۱۵
۵۹	مربوط تکملے	۱۶
۶۲	لائتنہائی حدود - لائتنہائی تکمل	۱۷
۶۶	مشق ۵	
۷۰	چند معیاری رقبے اور حجم - نخبیات کی ترسیم	۱۸
۸۱	بند نخبی کا رقبہ	۱۹

۸۶	رقبہ جو ایک متحرک خط مستقیم اپنی حرکت میں عبور کرتا ہے	۲۰
۸۹	سطح پیم	۲۱
۹۰	مشق ۷	
	باب سوم	
	تکملہ مجموعہ کی انتہا خیال کیا جاسکتا ہے۔ دوہرے تکملہ	
۹۴	تکملہ ایک مجموعہ کی انتہا ہے	۲۲
۹۸	مشق الیں	۲۳
۱۰۰	تقریبات۔ سین کا کلیہ	۲۴
۱۰۵	مشق ۸	
۱۰۸	اوسط قیمتیں	۲۵
۱۰۹	دوہرے تکملے	۲۶
۱۱۳	دوہرے تکملوں کی تقسیم۔ قطبی اجزا	۲۷
۱۱۹	جمود کے مرکز	۲۸
۱۲۳	جمود کا مہیا راسخ	۲۹
۱۲۷	حجم کا قطبی جزو۔ خطی تکملہ اور سطحی تکملہ کی تعریف	۳۰
۱۳۰	مشق ۹	
۱۳۳	گاما اور بیٹا تفاعل	
	باب چہارم	
	انحناء۔ لٹاف	
۱۳۸	انحناء۔ اساسی ضابطہ	۳۱

۱۴۰	دائرہ انحناء، نصف قطر، مرکز دائرہ انحناء	۳۲
۱۴۳	انحناء کے لئے اور ضابطے۔ منحنی کی ذاتی مساوات	۳۳
۱۴۹	مشق ۱۰	
۱۵۳	بغیچہ - درپچہ - متوازی منحنی	۳۴
۱۵۷	لفاف	۳۵
۱۵۸	لفاف کی مساوات - مسئلہ تاس	۳۶
۱۶۲	خط تدویر - بر تدویر - در تدویر	۳۷
	مشق ۱۱	
	باب پنجم	
	لا متناہی سلسلے	
۱۷۴	لا متناہی سلسلے - مستحق، متع، اتنازی سلسلے	۳۸
۱۷۷	انتہا کا وجود - مسائل	۳۹
	استدقاق پرکھنے کے طریقے - بنیادی جانچ - مقابلہ کی جانچ	۴۰
۱۸۰	جانچ کی نسبت - باقی	
۱۸۵	استدقاق مطلق - قوی سلسلے	۴۱
۱۸۹	یکساں استدقاق - سلسلوں کا تسلسل	۴۲
۱۹۴	مشق ۱۲	
	باب ششم	
	ٹیلر کا مسئلہ	
۱۹۸	ٹیلر کا مسئلہ - سکالر ان کا مسئلہ - باقی	۴۳

۲۰۳	پھیلاؤ کی مثالیں۔ جب لا، جہم لا، فو لا، لا، لوگ لا	۴۴
۲۰۹	ن، وین مشتق کا محبوب کرنا۔ مثالیں	۴۵
۲۱۲	سلسلوں کا تفرق اور مسلسل	۴۶
۲۱۶	پھیلاؤ۔ تقربات۔ سلسلوں کے تکمل کی مثالیں	۴۷
	مشق ۱۳	
	باب ہفتم	
	دو یا زیادہ متغیروں کے تفاعلوں کے لئے شیلر کا مسئلہ۔ استعمال	
۲۲۹	دو یا زیادہ متغیروں کے تفاعلوں کے لئے شیلر کا مسئلہ	۴۸
۲۳۴	مثالیں۔ ماسی ستوی۔ تہجاس تفاعلوں کے متعلق انگریز کے مسئلے	۴۹
۲۳۶	دو یا زیادہ متغیروں کے تفاعل کی اعظم اور اقل قیمتیں	۵۰
۲۳۹	مثالیں۔ غیر معین اجزاء ضربی	۵۱
	مشق ۱۴	
۲۴۴	غیر معین صورتیں۔ ابتدائی طریقے	۵۲
۲۴۶	احصا کا طریقہ	۵۳
۲۴۹		
۲۵۴	مشق ۱۵	
	باب ہشتم	
	تفرقی مساواتیں	
۲۵۸	تفرقی مساواتیں۔ تعریفات۔ مثالیں	۵۴

۲۶۰	پورا تکملہ	۵۵
۲۶۲	مشق ۱۶	
۲۶۳	رتبہ اول اور درجہ اول کی مساواتیں - متغیر جذباتی پذیر -	۵۶
	متجانس مساواتیں خطی مساواتیں - ٹھیک مساواتیں	
	رتبہ اول کی مساواتیں جو درجہ اول کی نہ ہوں - کلیروی	۵۷
۲۶۰	مساوات - نادرل -	
۲۶۱	دوسرے رتبہ کی مساواتیں - سادہ رفاص	۵۸
۲۶۳	خطی مساواتیں - عام خاصیت	۵۹
۲۶۴	مستمع فاعل	۶۰
۲۶۷	خفاص تکملہ	۶۱
۲۸۰	ہمزاد مساواتیں - باقی طقوں کی مثال	۶۲
۲۸۴	مشق ۱۷	
	باب نہدہم	
	محدود تکملے - علامت تکمل کے اندر اعمال	
۲۸۹	تکملہ کا تسلسل	۶۳
۲۹۱	غیر واجب تکملہ	
۲۹۱	لا متناہی حدود	۶۴
۲۹۳	مطلق اور شرط استدفاق تکملہ	
۲۹۵	لا متناہی تکمل - دوہرے تکملے	۶۵
۲۹۸	دو مشہور تکملے	۶۶
۳۰۲	گاما فاعل	۶۷

۳۰۳	۶۸	اوسط قیمت کا دوسرا مسئلہ۔ یک رنگ تفاعل۔ ایبل کی لاتساوی
۳۰۹		مشق ۱۸
۳۱۲	۶۹	علاست تکمل کے اندر اعمال۔ تفاعل کا یکساں تسلسل
۳۱۸	۷۰	تکملوں کا یکساں استتقاق
۳۲۲	۷۱	تسلسل اور حدود
۳۲۶	۷۲	علاست تکمل کے اندر اعمال۔ مشہور تکملے
	۷۳	لا انتہا حدود کے لئے تکمل کی ترتیب۔ یکساں استتقاق
۳۳۶		بالنسبہ
۳۴۱	۷۴	دیگر غیر واجب تکملے۔ مثالیں
۳۴۷		مشق ۱۹
		باب دہم
		فوریر کے سلسلے
۳۵۴	۷۵	فوریر کے سلسلے۔ مثالیں
۳۵۷	۷۶	مسئلہ کا بیان۔ تفاعل پر قیود
۳۶۰	۷۷	فوریر کے سلسلے کا تکملہ
۳۶۳	۷۸	سلسلوں کا جمع کرنا
۳۶۵	۷۹	عدم تسلسل
۳۶۶	۸۰	مبدأ اور دور کی تبدیلی
۳۶۷	۸۱	جیب اور جیب التمام کے سلسلے

۳۶۹	عام امور کا ذکر۔ فوریر کے سلسلوں کا تکمل اور تفرق	۸۲
۳۷۰	مثالیں	۸۳
۳۷۲	چند معیاری سلسلے	۸۴
۳۷۶	فوریر کا دوہرا نمونہ	۸۵
۳۸۰	آزمائشی تفاسیل	۸۶
۳۸۰	حوالے	۸۷
۳۸۱	مشق ۲۰	
۳۸۷	ضمیمہ	
۳۹۱	جوابات	

احصا کا ابتدائی رسالہ

حصہ دوم باب اول تکمیل

۱۔ تکمیل۔ دفعہ ۸۲ حصہ اول میں تکمیلی احصا کا اساسی مسئلہ بیان کیا گیا ہے اور وہ یہ ہے کہ ایک مسلسل تفاعل فاعل (لا) معلوم ہے، ایک ایسا تفاعل معلوم کرنا مقصود ہے (۱) جس کا مشتق فاعل (لا) ہو اور (۲) جو ایک معلومہ قیمت (۳) اختیار کرے جبکہ (لا) کو قیمت

دی جائے۔ اگر صرف پہلی شرط کی قید ہو تو اس سوال کے پیشمار حل ہونگے، لیکن ہم مانتے ہیں کہ سب حل ایک دوسرے سے صرف بلحاظ ایک مستقل مقدار کے مختلف ہوں گے۔ ایسے کسی ایک حل کو ہم فاعل (لا) کا نام محدود تکملہ یا تکمیلی کہیں گے اور مذکورہ مستقل تکمیل کا مستقل کہلائیکا۔ اس مستقل کو بعض اوقات اختیاری مستقل بھی کہا جائیگا کیونکہ اس کو جو قیمت ہم چاہیں دیکتے ہیں۔ اگر ت (لا) کوئی ایک تکملہ ہو تو ت (لا) + ج کو ہم عام تکملہ کہیں گے جہاں ج اختیاری مستقل ہے۔

مقلوب تفاعلوں کی ترقیم عفا فاعل (لا) کی بجائے فاعل (لا) کے

نامحدود تکملہ کو بالعموم علامت

مکمل فَا (لا) فر لا (۱)
 سے تعبیر کیا جائیگا اور اسے ہم فر لیتے "فَا (لا) کا تکملہ یا تکملی بلحاظ لا کے "یا مختصراً
 فَا (لا) فر لا کا تکملہ" تفریق فر لا تکمل کے متغیر یعنی لا کو ظاہر کرتا ہے اور پوری مشترک
 علامت مکمل فر لا سے مراد ہے "..... کا تکملہ بلحاظ لا کے"
 فَا (لا) کو تکمل کہا جائیگا۔

دفعہ ۸۲ حصہ اول میں جو کچھ [عفا فَا (لا)] آپ سے تعبیر کیا گیا تھا وہ اب

مکمل فَا (لا) فر لا (۲)

سے تعبیر ہوگا اور مؤخر الذکر کو اس طرح پڑھا جائیگا "فَا (لا) فر لا کا تکملہ
 ا سے ب تک"۔ جو تفاعل علامت مکمل فَا (لا) فر لا سے
 تعبیر ہوتا ہے اسے ہم محدود تکملہ کہیں گے اور ا ب تکملہ کی حدود کہلائیں گے، اونچی حد ہے
 اور ب اوپر کی۔ واضح ہو کہ یہاں حد سے مراد ہے تغیر کی وہ قیمت جو دفعہ کے
 ایک سرے پر ہو یعنی سرے پر کی قیمت۔ حد کے کسی اور اصطلاحی مفہوم سے اسے تیز کیا جائے۔
 ہندسی نقطہ نظر سے علامت (۲) اس رقبہ کو بلحاظ علامت اور مقدار کے تعبیر کرتی ہے جو
 فَا (لا) کی رسم کا معین غلی حد ا سے اوپر کی حد ب تک جانے میں عبور کرتا ہے۔ اگر
 ف (لا) فَا (لا) کا ایک نامحدود تکملہ ہو تو حسب دفعہ ۸۲ حصہ اول

مکمل فَا (لا) فر لا = [عفا فَا (لا)] = ف (ب)۔ ف (ا) (۳)

اگر ہم چاہیں تو ف (لا) کی بجائے عام تکملہ ف (لا) + ج استعمال کر سکتے ہیں مگر
 حال نتیجہ دونوں صورتوں میں وہی ہوگا کیونکہ عمل تفریق میں مستقل ج غائب ہو جائے گا
 ہندسی مفہوم کی بناء پر یا (۳) سے ظاہر ہے کہ

مکمل فَا (لا) فر لا = مکمل فَا (لا) فر لا = ف (ا)۔ ف (ب) (۴)

یعنی حدود ا ب کا باہم تبادلہ ہو سکتا ہے اگر ہم تکمل کی علامت بدل دیں۔

نیز ہندی مفہوم سے یا شکل ف (اب)۔ ف (ا) سے ظاہر ہے کہ محدود تکملہ صرف اپنی حدود کا تفاعل ہے اور متغیر کا تفاعل نہیں ہے۔ پس فل ف (ا) (ع) فرع کی بالکل وہی قیمت ہے جو فل ف (لا) فرلا کی۔

شرح کے نقطہ خیال سے اگر دیکھا جائے تو ف (لا) مشتق ہے ف (لا) کا اس لئے یہ اس شرح کا اندازہ کرتا ہے جس کے موافق کہ ف (لا) بلحاظ لا کے بڑھتا ہے۔ پس اگر لا سے ب تک بڑھے تو ف (لا) کا کل اضافہ خواہ یہ مثبت ہو یا منفی ف (ب)۔ ف (ا) کے مساوی ہوتا ہے۔ اس لئے معلوم ہوا کہ محدود تکملہ (۳) وجہ یا دلیل کے اضافے (ب)۔ ا کے جواب میں ف (لا) کے کل اضافے کا ناپ ہے جبکہ تفاعل کی شرح تغیر ف (لا) معلوم ہو۔

جس تفاعل کا مشتق ف (لا) ہے اور جو ا کے مساوی ہوتا ہے جبکہ لا، ا کے مساوی ہو وہ ہے (دفعہ ۸۲، حصہ اول)

عفا ف (لا)۔ [عفا ف (لا)] + ا

اور موجودہ ترقیم کے موافق یہ ہے

فل ف (لا) فرلا + ا یا فل ف (ا) فرع + ا (۵)

یہاں اوپر کی حد لا، وجہ کی وہ خاص قیمت ہے جس کے لئے تفاعل محسوب کیا گیا دفعہ ۸۲ حصہ اول کی ہندی تعبیر میں اوپر کی حد لا نقطہ ن کا فصلہ و مر ہے شرح کے نقطہ نظر سے علامت (۵) اس تفاعل کو تعبیر کرتی ہے جو شرح ف (لا) کے حساب سے بدلتا ہے اور جو ا کے مساوی ہوتا ہے جبکہ لا، ا کے مساوی ہو۔ محدود تکملوں کا مضمون اگلے باب میں زیادہ تفصیل سے بحث میں آئے گا تاہم جو کچھ اس کے متعلق اس دفعہ میں یا باب دہم حصہ اول میں دیا گیا ہے وہ اس امر کے لئے کافی ہے کہ طالب علم رقبوں وغیرہ کے آسان سوالات کو جو اس باب کے آخر میں مشق کے طور پر دئے گئے ہیں یا سانی حل کر سکے۔

۴۔ معیاری صورتیں۔ جہاں تک موجودہ بحث کا تعلق ہے تکمل محض عمل تفرق کا الٹ ہے اور کسی تکملہ کو محسوب کرنے کے لئے خواہ یہ محدود ہو یا نامحدود بیضوری ہے کہ معلومہ تکملوں کی ایک جدول پہلے سے مرتب کر لی جائے۔ یہ جدول تفرق کے معلومہ نتائج سے جو ہم پہلے حاصل کر چکے ہیں مرتب ہو سکیگی۔ اس لئے سب سے پہلے ہم معیاری صورتوں کی جدول تیار کر چکے ہیں اس کے بعد ان تکملوں کو جو جدول میں موجود نہ ہوں ایسی صورتوں میں تحویل کرنے کے طریقے بیان کر چکے جن کے تکملے معیاری صورتوں کی مدد سے معلوم ہو سکیں۔ نامحدود تکملوں کی تمام صورتوں میں اس جانچ کو عمل میں لانا چاہئے کہ تکملہ کا مشتق لازماً مساوی ہو تکمیل کے۔

یا علامات میں $F(Δ) = F(Δ, Δ)$ اگر $F(Δ) = \frac{F(Δ, Δ)}{Δ}$ (۱)
پس تکملہ کی تعریف یا تعین کے لئے حسب ذیل مساوات ہے۔

$$F(Δ) = [F(Δ, Δ), F(Δ)]$$

یعنی اعمال $F(Δ)$ اور $F(Δ, Δ)$ ۔ فرلا ایک دوسرے کے الٹ ہیں۔
تفرقوں کے مفہوم کے لحاظ سے $F(Δ, Δ)$ فرلا تفرق ہے $F(Δ)$ کا جبکہ
 $F(Δ)$ تکملہ ہو $F(Δ, Δ)$ کا۔ $F(Δ)$ کو اکثر اوقات تفرقہ $F(Δ, Δ)$ فرلا کا
تکملہ کہا جاتا ہے۔ چونکہ

$$F(Δ, Δ) = F(Δ) = [F(Δ, Δ), F(Δ)]$$

پس حامل $F(Δ)$ اور $F(Δ, Δ)$ ایک دوسرے کے الٹ ہیں۔

جدول ذیل میں اساسی معیاری صورتیں دی گئی ہیں باقی مشہور صورتیں بعد میں
دی جائیں گی۔ بعض معیاری صورتوں کو دو شکلوں میں دکھایا گیا ہے، دلیل اکثر اوقات
پس خلی شکل $Δ + Δ$ میں واقع ہوتی ہے اس لئے طالب علم کو ابتدا سے ہی
اسکے متناظر تکملہ سے مانوس ہو جانا چاہئے۔ ان سب نتائج کی جانچ عمل تفرق سے
کر لینی چاہئے۔

(۱) اگر ن - اتو

$$\frac{1+\omega}{1+\omega} = 1 \quad \text{و} \quad \frac{1+\omega}{1+\omega} = 1$$

(۲) اگر $n = 1$ تو

$\frac{1}{r} \text{ فرلا} = \text{لوک (لا)}$

(۳۳) $\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C$

(۴) $\text{موجب لا فرلا} = \text{جم لا}$ $\text{موجب (لا + ب) فرلا} = \frac{1}{2} \text{جم (لا + ب)}$

(۵) $\text{مجم لا فرلا} = \text{جب لا}$ $\text{مجم (الا ب) فرلا} = \frac{1}{2} \text{جب (الا ب)}$

(۶) نقطہ لا فرلا = مس لا' نقطہ (ولا + ب) فرلا = $\frac{1}{2}$ مس (ولا + ب)

(۷) $\frac{1}{2} \text{م} = \frac{1}{2} \text{م} + \frac{1}{2} \text{م}$ ، $\frac{1}{2} \text{م} = \frac{1}{2} \text{م} + \frac{1}{2} \text{م}$

$$(۸) \int \frac{f(x)}{x^2 - a^2} dx = \int \frac{f(x)}{(x-a)(x+a)} dx = \int \frac{f(x)}{x-a} dx - \int \frac{f(x)}{x+a} dx$$

$$\frac{1}{2} = \text{لوک } \left(\frac{1-1}{1+1} \right) \text{ اگر } 1 > 1$$

چونکہ جب ۱- (جہ ۱) = ۰ اسلئے جب ۱- اور - جہ ۱- دونوں

کے تکملے ہیں، اسی طرح کے مشاہدات $\frac{1}{1+1}$ کے تکملہ کے لئے

بھی درست ہیں۔ نامحدود تکملہ اکثر اوقات مختلف شکلوں میں بیان کیا جاسکتا ہے، لیکن ان صورتوں میں سے کوئی دو ایک دوسرے سے صرف بلحاظ ایک مستقل کے مختلف ہونگی۔ مقلوب ثلثی تفاعلوں پر تکمیلی اعمال احتیاط سے کئے جائیں کیونکہ یہ کثیر القیمت تفاعل ہیں، بالخصوص زاویہ کی حدود کے متعلق جو قیود (دفعہ ۶۴، حصہ اول) ہیں انکو ہمیشہ پیش نظر رکھا جائے۔

اگر ۱- منفی ہو تو $\frac{1}{1-1}$ کا تکملہ لوک ۱- نہیں ہے بلکہ لوک ۱- (۱) ہے اور اگر

۱- سے کم ہو تو $\frac{1}{1-1}$ کا تکملہ لوک ۱- (۱) ہوگا۔ صورت ۱۱ صورت ۱۰

کے ساتھ مقابلہ کی غرض سے درج کی گئی ہے، اسی غرض سے صورتیں ۸ اور ۹ ایک ساتھ جمع کی گئی ہیں۔

اگر ۱- منفی ہو تو اس کی تصدیق کی جائے کہ $\frac{1}{1+1}$ کا تکملہ

- لوک ۱- (۱) + ۱- (۱) + ۱- (۱) ہے۔

صورت ۹ میں لوکاتروں کی بجائے مقلوب زاویہ تفاعل استعمال ہو سکتے ہیں (دفعہ ۶۶، حصہ اول)

$$(۹) - 1 = \frac{1}{1+1} = \text{جہ ۱-} \left(\frac{1}{1} \right) \text{ جس } \frac{1}{1+1} = \text{جہ ۱-} \left(\frac{1}{1} \right)$$

اور یاد رہے کہ جہ ۱- $\frac{1}{1}$ دو قیمتوں والا تفاعل ہے۔ صورتیں مست ۱-،

مست ۱- ایسی ضروری نہیں۔

تلاش میں نہایت کار آمد ثابت ہوتے ہیں، لیکن یاد رہے کہ اکثر اوقات کسی سادہ سی جبر یہ یا مثلثی تحویل کی مدد سے متکمل کو ایسی ارقام کے مجموعہ کی شکل میں لا سکتا ممکن ہوتا ہے کہ ہر ایک رقم معیاری صورت میں آجائے تکمیل کے بعض نتائج اس قدر اہم ہیں کہ انہیں معیاری صورتوں میں شریک کر لینا مناسب ہے، لیکن طالب علم کو چاہئے کہ الگ الگ نتائج کو حفظ یاد رکھنے کی بجائے نفس تحویل کے اہل مشا کو ذہن نشین کر لے۔ اب ہم ایسی تحویلوں کی چند مثالیں درج کرینگے۔

مثال ۱۔ $\frac{2-3}{1-2} = \frac{1+1}{1-2}$ کو تکمیل کرو۔

تقسیم سے $\frac{2-3}{1-2} = \frac{1+1}{1-2} = \frac{1}{1-2} - \frac{2}{1-2} = \frac{1}{1-2} \times \frac{1}{1} - \frac{2}{1-2} \times \frac{1}{1}$

تکملہ ہے $\frac{2-3}{1-2} = \frac{1}{1-2} - \frac{2}{1-2} = \frac{1}{1-2} - \frac{2}{1-2} = \frac{1}{1-2} - \frac{2}{1-2}$ لوک $(1-2)$

ہر ایک ایسی کسر کا تکمیل جس میں شمار کنندہ لا کا کوئی منطق صحیح تفاعل ہو اور نسبت لا کا خطی تفاعل ہو اسی طرح عمل میں آسکتا ہے۔

مثال ۲۔ $\frac{1}{1-2}$ کو تکمیل کرو۔

اسکو جزوی کسروں میں تحلیل کرو

$$\frac{1}{1-2} = \frac{1}{1-2} \left(\frac{1}{1-2} - \frac{1}{1-2} \right)$$

$$\frac{1}{1-2} = \frac{1}{1-2} \left\{ \frac{1}{1-2} - \frac{1}{1-2} \right\} = \frac{1}{1-2} \left\{ \frac{1}{1-2} - \frac{1}{1-2} \right\}$$

$$\frac{1}{1-2} = \frac{1}{1-2} \left\{ \frac{1}{1-2} - \frac{1}{1-2} \right\}$$

جبکہ لا < ۲ کیونکہ صرف اسی صورت میں $\frac{1-2}{1+2}$ مثبت ہوگا۔ اگر

مشق ۱

اشدہ آتا ۱۵ کو بلحاظ لا کے تکمل کرو۔

- ۱- $\frac{3^2 - 2^2 - 1^2}{3 - 2}$ - ۲ $\frac{1 + 2}{1 - 2}$
 - ۳- $\frac{2^2 - 1^2}{2 + 1}$ - ۴ $\frac{3 - 2}{(3 - 2)(2 - 1)(1 - 2)}$
 - ۵- $\frac{1}{2^2 - 3 - 4}$ - ۶ $\frac{1}{2^2 + 3 + 4}$
 - ۷- $\frac{1}{2^2 - 3 - 4}$ - ۸ $\frac{1}{2^2 + 3 + 4}$
 - ۹- جم لا - ۱۰ جم لا - ۱۱ جم (لا + ب)
 - ۱۲- جب لا - ۱۳ جب ۳ لا جب ۴ لا
 - ۱۴- جب (۲ + لا + ۳) جم (۴ + لا + ۳) - ۱۵ جم لا جم ۲ لا جم ۳ لا
 - ۱۶- $\frac{1}{2^2 - 3 - 4}$ - ۱۷ $\frac{1}{2^2 + 3 + 4}$
 - ۱۸- $\frac{1}{2^2 - 3 - 4}$ - ۱۹ $\frac{1}{2^2 + 3 + 4}$
 - ۲۰- $\frac{1}{2^2 - 3 - 4}$ - ۲۱ $\frac{1}{2^2 + 3 + 4}$
 - ۲۲- اگر م 'ن نامادی مثبت صحیح عدد ہوں تو
- مجم لا جم ن لا فر لا = ۰ = مجم لا جب ن لا فر لا

اور ہر شکل کی قیمت معلوم کرو جبکہ م اور ن مساوی مثبت صحیح عدد ہوں۔
۲۳۔ شکلوں کی ترتیبوں سے دکھاؤ کہ ذیل کی مساواتیں درست ہیں

$$(۱) \quad \text{م} \times \text{ج} = \text{لا} \times \text{فرلا} = \text{م} \times \text{ج} \times \text{لا} \times \text{فرلا} \times \text{ن} \times \text{ثبت} \text{ ہے}$$

$$(۲) \quad \text{م} \times \text{ج} \times \text{لا} \times \text{فرلا} = \text{م} \times \text{ج} \times \text{لا} \times \text{فرلا} \times \text{ن} \times \text{ثبت} \text{ ہے}$$

$$(۳) \quad \text{م} \times \text{ج} \times \text{لا} \times \text{فرلا} = \text{م} \times \text{ج} \times \text{لا} \times \text{فرلا} \times \text{اگر ن جفت صحیح عدد ہو}$$

لیکن $\text{اگر ن طاق صحیح عدد ہو}$
۲۴۔ مکانی ما = ۴ لا اور نقطہ (ب، ج) میں سے گزرنیوالے دوہرے
مستقیم کے درمیان جو رقبہ محدود ہے وہ $\frac{۱}{۲} \text{ ب} \times \text{ج}$ کے مساوی ہے۔

۲۵۔ $\text{ا} \times \text{ب}$ مثبت ہیں اور $\text{ا} > \text{ب}$ ثابت کرو کہ جو رقبہ نام $\text{لا} \times \text{ما} = \text{ج} \times ۲$ ،
محور کا اور $\text{ا} \times \text{ب}$ پر کے مستقیموں کے درمیان گھرا ہوا ہے وہ $\text{ج} \times \text{لوک} \left(\frac{\text{ب}}{\text{ا}} \right)$ کے
مساوی ہے۔ اگر نام کی بجائے معلومہ منحنی ما = $\frac{\text{لا}}{\text{ج}}$ ہو تو رقبہ

$$\left(\text{ب} \times \frac{\text{ا}}{\text{ج}} \right) \times \left(\frac{\text{ن}}{\text{ا}} \right) \times \text{ج} \text{ ہوگا۔}$$

۲۶۔ ثابت کرو کہ دو متوازی منحنی ما = $\text{ب} \times \text{ج}$ (لا) کے ایک خراب اور محور لا کے
درمیان جو رقبہ گھرا ہوا ہے وہ $\frac{۱}{۲} \text{ ا} \times \text{ب}$ کے مساوی ہے۔

۲۷۔ ناقص اپنے محور اعظم کے گرد گھومتا ہے ثابت کرو کہ ایک پوری گردش سے جس
کہ نام کی تکوین ہوتی ہے اس کا حجم $\frac{۴}{۳} \pi \times \text{ا} \times \text{ب}$ ہے۔ اگر گردش کا محور محور اصغر ہو تو
حجم $\frac{۴}{۳} \pi \times \text{ا} \times \text{ب}$ ہوگا۔

۲۸۔ بعض سطحوں کو اگر ایک ایسے نقطہ پر جس کا فاصلہ لا ہے محور لا پر عموداً تراش جائے تو
تراش کا رقبہ $\frac{۱}{۲} \text{ ا} \times \text{ب}$ لا = ج لا ہو تا ہے جہاں ا ، ب ، ج مستقل ہیں،
ثابت کرو کہ دو متوازی سطحوں کے درمیان جو محور لا پر عمود دار ہیں ان سطحوں کا حجم
 $\frac{۱}{۲} (\text{ب} - \text{ا}) \times \text{لا} + \frac{۱}{۲} (\text{ب} + \text{ا}) \times \text{ج} \times \text{لا}$ منقطع ہوتا ہے

جہاں Δ ب اُن نقطوں کے فصل ہے جہاں مستویات محور کا کو کاٹتی ہیں (۱) (ب) اس نتیجہ کو ذیل کے حجم معلوم کرنے میں استعمال کرو۔
 (۱) مخروط کا حجم (۲) فقہہ کرہ کا حجم (۳) ناقص نما کا حجم جس کی مسادات

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \text{ ہے۔}$$

۲۹۔ مثال ۲۸ میں فرض کرو کہ Δ ب اور این کے درمیانی نقطہ میں سے گزرنیوالی تریوں کے رقبے بالترتیب ص، ص، اور ص ہیں اور ب۔ ۲ = ۱، ثابت کرو کہ حجم مذکور $\frac{1}{2}$ (ص + ص + ص) ہے۔

۴۔ **تغییر کی تبدیلی**۔ دفعہ ۵۹ حصہ اول میں تفاعل کے تفاعل کو تفرق کر نیکاً کلیہ بتایا گیا ہے۔ اسی کلیہ سے مکمل کا ایک مشہور طریقہ حاصل ہوتا ہے، دفعہ گذشتہ میں جن دو عام طریقوں کا ذکر کیا گیا ہے ان میں سے یہ ایک ہے۔ اس کلیہ کی رو سے مکمل کے تغیر کو بدل کر مکمل عمل میں لاتے ہیں۔ سب سے پہلے سادہ سی مثال لو

$$M = \int \frac{F}{L^2 + L^2 + L^2} dL, \quad \frac{1}{L^2 + L^2 + L^2} = \frac{F}{L^2}$$

رکھو لا = ۱۔ ۱۔ اس طرح م، کا تفاعل بن جاتا ہے۔

$$\frac{F}{L^2} = \frac{F}{L^2} \times \frac{F}{F} = \frac{1}{L^2 + L^2 + L^2} = \frac{1}{L^2 + 1}$$

اب اوپر کا تخمد کا تفاعل ہے اور یہ اس طرح لکھا جاسکتا ہے

$$M = \int \frac{F}{L^2 + 1} dL = \text{مس}^{-1} M = \text{مس}^{-1} (L + 1)$$

تغییر کو بدلنے سے ہم مکمل کو ایک معلومہ شکل میں لے آئے ہیں، اس طرح مکمل آسان ہو گیا ہے۔ اب عام صورت پر غور کرو جہاں مکمل Δ (لا) ہے۔ فرض کرو کہ ابدال Δ = Δ (فقد) کی مدد سے م کو Δ کا تفاعل بنایا گیا ہے تب

$$\frac{F}{L^2} = \frac{F}{L^2} \times \frac{F}{F} = \frac{1}{L^2} \dots (1)$$

مساوات (۱) میں $\frac{\text{فرلا}}{\text{فرع}}$ کو لا = فہ (ع) سے معلوم کرو اور پھر نئے متکمل
 فار (لا) $\frac{\text{فرلا}}{\text{فرع}}$ کو اسی مساوات کے ذریعہ ع کی رقوم میں بیان کرو۔ اس طرح مساوات
 (۱) لا سے پاک ہو جائیگی اور حاصل ہوگا

$$\text{ما} = \text{م} \text{ فار (لا) } \frac{\text{فرلا}}{\text{فرع}} \text{ فرع} \dots\dots\dots (۲)$$

یہ ممکن ہے کہ نیا متکمل جو اوپر حاصل ہوا ہے معیاری صورت میں نہ ہو یا اگر ایسا نہ ہو تو بہ نسبت
 پرانے متکمل کے یہ زیادہ آسانی سے ایسی صورت میں تحویل ہو سکے، پس

$$\text{ما} = \text{م} \text{ فار (لا) } \text{فرلا} = \text{م} \text{ فار (لا) } \frac{\text{فرلا}}{\text{فرع}} \text{ فرع} \dots\dots\dots (۳)$$

الفاظ میں متغیر کو بدلنے کا قاعدہ یوں بیان ہو سکتا ہے۔

فرلا کی بجائے (فرلا) فرع رکھو اور لا اور ع کے درمیان جو مساوات ہے
 اس کے ذریعہ نئے متکمل فار (لا) $\frac{\text{فرلا}}{\text{فرع}}$ کو ع کی رقوم میں بیان کرو۔ اس طرح متکملہ
 نئے متغیر کا تفاعل بن جائیگا۔
 جب تک عمل کا عمل اس طرح پورا ہو چکے تو تکمیلی تفاعل کو پُرانے متغیر کی رقوم میں واپس
 لے آنا چاہیے۔

جب 'لا' = 'ا' تو ع = عا اور جب 'لا' = 'ب' تو ع = بے اور اگر 'لا' = 'ع' کا باہمی
 ربط ایسا ہو کہ جب 'لا' = 'ا' سے 'ب' تک مسلسل طور پر بدلے تو ع = عا سے بے تک
 مسلسل طور پر بدلتا ہو تو

$$\text{م} \text{ فار (لا) } \text{فرلا} = \text{م} \text{ فار (لا) } \frac{\text{فرلا}}{\text{فرع}} \text{ فرع} \dots\dots\dots (۴)$$

ظاہر ہے کہ اس صورت میں پُرانے متغیر کی طر واپس آنے کی ضرورت نہیں۔

اوپر کے استحالوں (۳) اور (۴) کے استعمال کرنے میں یہ ضروری ہے کہ مکمل کے وقفوں
ب۔ ۱ اور ب۔ ۲ کے درمیان لا کی ہر ایک قیمت کے جواب میں ع کی ایک اور
صرف ایک قیمت ہو اور اسی طرح ع کی ہر ایک قیمت کے جواب میں لا کی ایک اور صرف
ایک قیمت ہو، اگر لا اور ع کا باہمی ربط ایسا ہو کہ اس سے ع، لا کے کثیر القیمیت تفاعل
کے طور پر حاصل ہو یا لا، ع کے کثیر القیمیت تفاعل کے طور پر ملے تو احتیاط سے مناسب
قیمت کا انتخاب کرنا چاہیے۔ [ملاحظہ ہو دفعہ ۸، مثال ۳ اور دفعہ ۱۴]

۵۔ متغیر بدلنے کی مثالیں

مثال ۱۔ جب، فا (لا) اس شکل سا (۱+لا+ب) کا ہو
فرض کرو کہ $ع = ۱+لا+ب$ ، فرع = $۱+لا$ ، فرلا = $\frac{۱}{۲}$ فرع
کی سا (۱+لا+ب) فرلا = $\frac{۱}{۲}$ کی سا (ع) فرع
یہ نمونہ اکثر واقع ہوتا ہے۔ مثلاً اگر $ع = لا - \frac{۱}{۲}$ تو

$$کی \frac{فرلا}{لا-لا-۱} = \frac{۱}{۲} کی \frac{فرلا}{(لا-۱)+\frac{۱}{۲}} = \frac{۱}{۲} کی \frac{فرع}{\frac{ع}{۲}+۱}$$

$$= \frac{۱}{۲} \times \frac{۲}{ع} مست (۱) = \frac{۲}{ع} مست (۲) = \frac{۱}{ع} مست (۱+لا-۱)$$

$$کی \frac{فرلا}{لا-لا-۱} = \frac{۱}{۲} کی \frac{فرلا}{(لا-۱)+\frac{۱}{۲}} = \frac{۱}{۲} کی \frac{فرع}{\frac{ع}{۲}+۱}$$

مستقل جزو ضروری مثلاً ۲ حسب ضرورت تکمیلی علامت کے باہر نکال لیا جاسکتا ہے اسی طرح

اگر ضرورت ہو تو مستقل جزو ضروری داخل کر لیا جاسکتا ہے جیسا مثال ۳ میں۔

مثال ۲۔ جب، فا (لا) اس شکل سا (لا) لا کا ہو۔

$$فرض کرو کہ $ع = لا$ ، فرع = $ن لا$ ، فرلا = $لا$ ، فرلا = $\frac{۱}{ن}$ فرع$$

$$کی سا (لا) لا فرلا = $\frac{۱}{ن}$ کی سا (ع) فرع$$

پس جب، $e = لا^2$

$$سما (لا) + ب = لا فرلا = \frac{1}{4} سما (لا) + ب = فرع = \frac{1}{3} (لا + ب) \frac{1}{3}$$

$$= (لا + ب) \frac{1}{3} \frac{1}{3}$$

اس نمکد کی قیمت اس طرح بھی حاصل ہو سکتی ہے اگر رکھا جائے $e = لا + ب$
یا $e = لا + ب$ - موخر انداز تبدیل سے

$$لا فرلا = \frac{1}{3} ع فرع اور سما (لا) + ب = لا فرلا = \frac{1}{3} ع فرع = \frac{2}{3} ع$$

جو قیمت اوپر معلوم ہوئی ہے۔

مثال ۳- جب، $فا (لا)$ اس شکل $[سما (لا)]$ سما (لا) کا ہو
فرض کرو کہ $e = سما (لا)$ ، $فرع = سما (لا) فرلا$

$$فا (لا) فرلا = ع فرع$$

اور نمکد قوت کی شکل میں ہوگا اگر $ن$ - ا کے مساوی نہ ہو اور لوکار تم کی شکل میں ہوگا
اگر $ن = 1$

$$(13) سما (لا) [سما (لا) فرلا] = \frac{1}{1+n} [سما (لا)]^{1+n} \text{ جبکہ } n = 1$$

$$(3) سما (لا) فرلا = لوک [سما (لا)]$$

(3) سے ہم دیکھتے ہیں کہ جب متکمل ایک کسر ہو جس کا شمار کنندہ نب نما کا مشتق
ہے تو اس کا نمکد نسب نما کا لوکار تم ہوتا ہے۔

بعض اوقات متکمل کو مثال ۳ کی شکل میں لائیکے لئے ایک مستقل جزو ضربی کا شریک
کرنا ضروری ہوتا ہے۔ مثلاً ذیل کے سوالوں میں

$$(1) سما (لا) فرلا = \frac{1}{3} سما (لا) فرلا = \frac{1}{3} (لا^2 - لا + 1) (لا^2 - لا + 1) فرلا$$

$$= \frac{1}{3} (لا^2 - لا + 1)$$

$$\left\{ u + \frac{1}{2}(u + \frac{1}{2}) \right\} \text{ کو } \frac{1}{2} = \frac{\frac{1}{2}(u + \frac{1}{2})}{u + \frac{1}{2}(u + \frac{1}{2})} \int (2)$$

(۳) $\int \text{مس لا فرلا} = - \int \frac{\text{جب لا}}{\text{جم لا}} \text{فرلا} = - \text{لوک جم لا} = \text{لوک قطا لا}$

(۴) کس لا فلا = کس لا قسط لا - (۱) فلا = کس لا قسط لا فلا - کس لا فلا

مثال ۴۔ فار (لا) = جب لا جم لا
(۱) اگر م، ن میں سے کوئی ایک بھی طاق مثبت صحیح عدد ہو تو مکمل آبائی عمل میں
آسکتا ہے۔ جب م، ن طاق ہو تو رکھو ع = جم لا اور جب م، ن طاق ہو تو رکھو
ع = جب لا۔

مثال کے طور پر فرض کرو کہ فارسی = جب لا جہم لا

رکوع = جب لا، فرع = جم لا فلا، جم لا = (ا-ع) ۲

مثال ۵۔ اگر فاعل (لا) اور مفعول (لا) ب کا منطق تفاعل ہو تو تعویض یا تبدل
 لا + ب = ع سے نیا شکل ع کا منطق تفاعل بن جائیگا۔
 مثلاً اگر لا + ا = ع تو

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C$$

اور تھوڑی سی تحویل کے بعد = ۲ (۱ + ۱) (۱۵ (۱ + ۱) ۳ (۱ + ۱) ۴ (۱ + ۱) ۵ (۱ + ۱) ۱۰۵ علم
 اوپر کی مثالوں میں تغیر بدلنے کی ابتدائی مشہور صورتیں جو اکثر واقع ہوتی ہیں حل کی گئی ہیں کتاب
 ان کا غور سے مطالعہ کرے اور اس کے بعد شق ۲ کے ادائل کی مثالوں کے حل کرنے کی
 کوشش کرے۔ کافی مشق بہم پہنچانے سے ہی اسکے لئے ایسی تحویلوں کے استعمال میں سہولت
 پیدا ہو سکتی ہے۔

۶۔ دوسرے درجہ کے تفاعل۔ اگر $rs = r_1 + r_2$ اور

ف (لا) ایک منطوق صحیح تفاعل ہو تو $\frac{ف (لا)}{مر}$ ایک ایسے مجموعہ کی شکل میں بیان

ہو سکتا ہے جو ایک منطقی صحیح تفاعل اور ایک کسر واجب $\frac{\text{الاجب}}{\text{مر}}$ پر مشتمل ہو۔

ہم ان شکلوں $\frac{a+b}{a-b}$ اور $\frac{a+b}{a-b}$ پر بحث کریں گے۔

مبتدیوں کے لئے آسانی اس میں ہوگی کہ مس کو ذیل کی صورت میں لکھا جائے

$$\frac{2-7.12}{12} + \left(\frac{2}{12} + 9 \right) 1 = \checkmark$$

اگر مثبت ہو تو اسے ہم + کے مساوی لے سکتے ہیں اور اگر منفی ہو تو اسے - کے مساوی لیا جاسکتا ہے، ایسا کرنے میں عمل کی عمومیت میں فرق نہیں آتا کیونکہ مستقل جزو ضربی ہمیشہ کبھی علامت کے باہر نکال لیا جاسکتا ہے۔

اگر سراج - بنام مثبت ہو تو سر کے اجزاء ضربی خیالی ہوں گے اور اس شکل کا ہوگا

- س = (۱ + ع۱) + ب۱ (۱)
 اگر ۳ درج - ب۱ منفی ہو تو س کے اجزائے ضربی حقیقی ہونگے اور اگر
 ۱ = ۱ + ا تو س = (۱ + ع۱) - ب۱ (۲)
 ۱ = ۱ - ا تو س = ب۱ - (۱ + ع۱) (۳)

صورت اول - ۱ + ا + ب

- (۱) اگر س کے اجزائے ضربی حقیقی ہوں تو اس کسر کو دفعہ ۳ مثال ۲ کی مانند جزوی کسروں میں تحلیل کیا جائے۔
 (۲) اگر س کے اجزائے ضربی خیالی ہوں تو س = (۱ + ع۱) + ب۱، ہم اس صورت میں کسر کو اس طرح بدل سکتے ہیں کہ دفعہ ۵ مثال ۲ اور مثال ۱ کی طرح متغیر ہونے سے حل عمل میں آسکے۔

ل۱ اور ع۱ ایسے معلوم کرو کہ

$$\frac{1}{s} = \frac{1}{(1 + E_1) + B_1} = \frac{1}{(1 + E_1) + B_1} = \frac{1}{(1 + E_1) + B_1} = \frac{1}{(1 + E_1) + B_1}$$

اس لئے $\frac{1}{s} = \frac{1}{(1 + E_1) + B_1} = \frac{1}{(1 + E_1) + B_1} = \frac{1}{(1 + E_1) + B_1}$

اور $\frac{1}{s} = \frac{1}{(1 + E_1) + B_1} = \frac{1}{(1 + E_1) + B_1} = \frac{1}{(1 + E_1) + B_1}$

پہلا تکہ دفعہ ۵ مثال ۳ کی صورت ہے اور دوسرا دفعہ ۵ مثال ۱ کی۔

صورت دوم - ۱ + ا + ب

- (۱) س فرض کرو کہ (۱ + ع۱) + ب۱ ہے یا (۱ + ع۱) - ب۱
 ۱ + ا + ب کے لئے اوپر کی تحلیل عمل میں لاؤ

$$\frac{1}{s} = \frac{1}{(1 + E_1) + B_1} = \frac{1}{(1 + E_1) + B_1} = \frac{1}{(1 + E_1) + B_1}$$

$\frac{1}{s} = \frac{1}{(1 + E_1) + B_1} = \frac{1}{(1 + E_1) + B_1} = \frac{1}{(1 + E_1) + B_1}$

$$(۲) \text{ فرض کرو کہ } \text{س} = \text{بہ} - (۱ + \text{ع} + \text{ا}) \text{ تب}$$

$$\int \frac{(۱ + \text{ا} + \text{ج}) \text{ فرلا}}{\text{س}} = \int \frac{\text{س} - (۲ + \text{ع} + \text{ا}) \text{ فرلا}}{\text{س}} + \int \frac{\text{فرلا}}{\text{بہ} - (۱ + \text{ع} + \text{ا})}$$

$$= - \int \frac{\text{فرلا}}{\text{بہ} - (۱ + \text{ع} + \text{ا})} + \int \frac{\text{فرلا}}{\text{س}}$$

جب 'ا' = ۱۔ تو س =۔ تو متکمل دفعہ ۵ مثال ۱ کے نمونہ کی ہے۔
عددی مثالوں کے حل کرنے میں سب سے پہلے س کا مشتق معلوم کر لینا چاہئے اس کے
بعد 'ا' + 'ج' کو مطلوب شکل میں رکھ لینا آسان ہوگا۔

$$\text{مثال ۱۔} \int \frac{(۱ + \text{ا} + \text{ج}) \text{ فرلا}}{۳ + \text{ا}^۲ + \text{ا}}$$

$$\text{حقیقی} \quad (۲ + \text{ا}^۲ + \text{ا} + ۱) = ۳ + \text{ا} + ۱ = \frac{۳}{\text{ا}} + (۱ + \text{ا} + \text{ا}^۲)$$

$$\{ \frac{۲۳}{۱۲} + (\frac{۱}{\text{ا}} + \text{ا}) \} ۲ = ۳ + \text{ا} + \text{ا}^۲$$

$$\text{متکملہ} = \frac{۳}{\text{ا}} \int \frac{(۱ + \text{ا} + \text{ج}) \text{ فرلا}}{۳ + \text{ا}^۲ + \text{ا}} + \int \frac{۱}{\text{ا}} \text{ فرلا} - \int \frac{۲۳}{۱۲} + ۲(\frac{۱}{\text{ا}} + \text{ا}) \text{ فرلا}$$

$$= \frac{۳}{\text{ا}} \text{ لوگ } (۲ + \text{ا}^۲ + \text{ا} + ۱) + \frac{۱}{۲۳۱۲} \text{ س} - \left(\frac{۱ + \text{ا} + \text{ا}^۲}{۲۳۱۲} \right)$$

$$\text{مثال ۲۔} \int \frac{(۱ + \text{ا} + \text{ج}) \text{ فرلا}}{۳ + \text{ا}^۲ + \text{ا} - ۱}$$

$$\frac{۳}{\text{ا}} - ۱ = ۱ + \text{ا} - \frac{۳}{\text{ا}} + (۱ + \text{ا} + \text{ا}^۲)$$

$$- ۱ = ۳ + \text{ا} + \text{ا}^۲ - \left[\frac{۲۵}{۱۲} - ۲(\frac{۱}{\text{ا}} - \text{ا}) \right]$$

$$\text{متکملہ} = - \frac{۳}{\text{ا}} \int \frac{(۱ + \text{ا} + \text{ج}) \text{ فرلا}}{۳ + \text{ا}^۲ + \text{ا} - ۱} + \int \frac{۴}{۲۱۲} + \frac{\text{فرلا}}{۲۱۲} - \left[\frac{۲۵}{۱۲} - ۲(\frac{۱}{\text{ا}} - \text{ا}) \right] \text{ فرلا}$$

$$= \frac{3}{2} - \sqrt{2 + 2 + 3} + \frac{4}{21.2} \text{ جب } \left(\frac{1-2}{5} \right)$$

یہ نمونے

$$\frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{(م+ن)} + \frac{1}{(ا+ب+ج)}}} \quad \frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{(ا+ب+ج)}}}$$

اوپر کی صورتوں میں تحویل ہو جائیگے اگر متغیر کو بالترتیب ان روابط $\frac{1}{ع} = \frac{1}{م}$ اور

$\frac{1}{ع} = \frac{1}{ن}$ کے ذریعہ بدلا جائے۔ نوکارتی تفرق سے ان سے حاصل ہوگا

$$\frac{فرلا}{لا} = \frac{فرع}{ع} \quad \text{اور} \quad \frac{فرلا}{لا} = \frac{فرع}{ع} \quad \frac{1}{ع} = \frac{1}{م} \quad \frac{فرع}{ع}$$

لا کی بجائے $\frac{1}{ع}$ لکھ کر متغیر کا بدلنا اور صورتوں میں بھی سودمند ہوتا ہے، مثلاً

$$\frac{فرلا}{ع} = \frac{فرع}{ع} \quad \frac{1}{ع} = \frac{فرع}{ع} \quad \frac{1}{ع} = \frac{فرع}{ع} \quad \frac{1}{ع} = \frac{فرع}{ع}$$

$$\frac{1}{ع} = \frac{فرع}{ع} \quad \frac{1}{ع} = \frac{فرع}{ع} \quad \frac{1}{ع} = \frac{فرع}{ع}$$

زیادہ عام صورت $\frac{1}{(ا+ب+ج)}$ اسی طرح حل ہو سکیگی اگر دو درجی جملہ کو اس

شکل میں بیان کر لیا جائے جو اس دفعہ کے شروع میں دی گئی ہے۔

۷۔ مثلی اور زائیدی ابدال۔ دوسرے درجہ کے تفاعل کے ساتھ عمل کرنا

ایک اور طریقہ یہ ہے کہ مثلی یا زائیدی ابدال کے ذریعہ اسے تحویل کیا جائے، تفاعل کی شکل سے مناسب تحویل کا پتہ چلیگا۔

$$\frac{1}{(ا+ب+ج)} = \frac{1}{(ا+ب+ج)} \quad \frac{1}{(ا+ب+ج)} = \frac{1}{(ا+ب+ج)}$$

$$\frac{1}{(ا+ب+ج)} = \frac{1}{(ا+ب+ج)} \quad \frac{1}{(ا+ب+ج)} = \frac{1}{(ا+ب+ج)}$$

$$\frac{1}{(ا+ب+ج)} = \frac{1}{(ا+ب+ج)} \quad \frac{1}{(ا+ب+ج)} = \frac{1}{(ا+ب+ج)}$$

$$\frac{1}{(ا+ب+ج)} = \frac{1}{(ا+ب+ج)} \quad \frac{1}{(ا+ب+ج)} = \frac{1}{(ا+ب+ج)}$$

$$\frac{1}{(ا+ب+ج)} = \frac{1}{(ا+ب+ج)} \quad \frac{1}{(ا+ب+ج)} = \frac{1}{(ا+ب+ج)}$$

ذیل کی مثالوں آتا کہ معیاری صورتوں میں شمار کیا جائے، ہر صورت میں اندراج
ع = مس $\frac{لا}{پ}$ ہے۔

مثال ۱۔ $ک = \frac{فر لا}{ج ب لا} = \frac{فر ع}{ع} = \frac{لوک ع}{لوک مس} = \frac{لا}{پ}$

مثال ۲۔ $ک = \frac{فر لا}{ج ب لا} = \frac{فر ۲}{ع ۱ - ۱} = \frac{لوک ۱ + ۱}{لوک ۱ + ۱} = \frac{لوک ۱ + ۱}{لوک ۱ + ۱} = \frac{لا}{پ}$
یہ تکملہ کئی صورتوں میں بیان ہو سکتا ہے جیسے

لوک مس $(\frac{لا}{پ} + \frac{پ}{پ})$ یا $\frac{۱}{۲}$ لوک $\frac{۱ + ج ب لا}{۱ - ج ب لا}$

اہل و = $\frac{پ}{۲}$ - لا یا و = لا - $\frac{پ}{۲}$ سے $\frac{۱}{۲}$ کا تکملہ $\frac{۱}{۲}$ کے تکملہ میں

تحویل ہو سکیگا۔

مثال ۳۔ $ک = \frac{فر لا}{ج ۱ + ب ج لا} = \frac{فر ۲}{ع ۱ + (ب ۱ - ۱) ع} = \frac{فر ۲}{ع ۱ + (ب ۱ - ۱) ع}$

فرض کرو کہ ۱ + ب مثبت ہے تب تین صورتیں ہیں، ب تعداد کم ہو اس سے یا بڑا ہو
اس سے یا برابر ہو اس کے۔

(۱) ب > ۱ اور اسلئے ب > ۱ تعداد۔

$ک = \frac{فر لا}{ج ۱ + ب ج لا} = \frac{۲}{ب ۱ - ۱} مس ۱ ع = \frac{۱ - ب}{ب ۱ + ۱} ع = مس \frac{لا}{پ}$

(۲) ب < ۱ اور اسلئے ب - ۱ مثبت ہے

$ک = \frac{فر لا}{ج ۱ + ب ج لا} = \frac{۱}{ب ۱ - ۱} لوک \frac{ب ۱ + ۱ + ع ۱ + ب ۱ - ۱}{ب ۱ - ۱ - ع ۱ + ب ۱ - ۱}$

(۳) ب = ۱، $ک = \frac{فر لا}{ج ۱ + ب ج لا} = \frac{فر لا}{۱} = \frac{۱}{۲} مس \frac{لا}{پ}$

$ک = \frac{فر لا}{ج ۱ - ب ج لا} = \frac{فر لا}{۱} = \frac{۱}{۲} مم \frac{لا}{پ}$

صورت دوم ایسی ضروری نہیں جیسی (۱) ، مکملہ (۱) کی قیمت ایک اور شکل میں لکھی جاسکتی ہے جسے یاد رکھنا آسان ہے ، ملاحظہ ہو حسب ذیل۔

$$\text{رکو طہ} = ۲ \text{ سن } \left\{ \text{سن } \frac{۱}{۴} \times \left[\frac{۱-ب}{۱+ب} \right] \right\} \text{ اس سے}$$

$$\text{جم طہ} = \frac{۱+ب}{۱-ب} \text{ (۱-ب جم طہ) (۱+ب جم لا) = لا-ب}$$

اگر ایک قطع ناقص ہو جس کا خروج المکز $\frac{ب}{۱}$ ہے تو لا اسکا اصلی اور طہ خروج المکز زاویہ بقیاعدگی ہے۔ (ملاحظہ ہو نوڈ فرمے کی کتاب علم ہئیت دفعہ ۱۸۶ ، گر مے کا رسالہ طبعیات دفعہ ۵۲۰)

۱+ب جم لا ، اپنی قیمتوں کی پوری سمت میں سے گذر جاتا ہے جبکہ لا ، صفر سے π تک بدلتا ہے یا - π سے صفر تک منفی قیمتوں میں سے ہوتا ہوا بدلتا ہے۔ اگر لا صفر اور π کے درمیان رہے تو طہ مثبت ہوتا ہے اور صفر تا π کے درمیان واقع ہوتا ہے لیکن اگر لا - π اور صفر کے درمیان واقع ہو تو طہ منفی ہوتا ہے اور - π اور صفر کے درمیان واقع ہوتا ہے اسلئے منقلب جیب تمام پر جو قید (دفعات ۲۸) میں لگائی گئی ہے اسکو ملحوظ رکھتے ہوئے

$$\text{فر لا} = \frac{۱}{\text{جم } \frac{۱}{۲} \left(\frac{۱+ب}{۱-ب} \right)} \text{ اگر } \frac{۱}{۲} \geq \text{لا} \geq \pi$$

لیکن $\frac{۱}{۲} \geq \text{جم } \frac{۱}{۲} \left(\frac{۱+ب}{۱-ب} \right) \geq \pi$ اگر $\pi \geq \text{لا} \geq ۰$ ۔
جب مکملہ تو فاس منقلب کی رقم میں بیان کیا جائے تو ایسا اشتباہ واقع نہیں ہوتا۔

$$\text{مثال ۴-} \text{ک } \frac{۱}{۱+ب} \text{ جب لا مثبت ' - } \frac{\pi}{۲} > \text{لا} > \frac{\pi}{۲}$$

$$\text{مکملہ} = \text{ک } \frac{۲}{۶۱+۶۲+۶۳}$$

اگر $\text{ک} > \frac{\pi}{۲}$ تو ربط لا = $\frac{\pi}{۲}$ - و یا لا = $\frac{\pi}{۲}$ + و سے مکملہ مثال (۱۳) میں قبول ہو جائیگا۔ طالب علم کو یہ دونوں ابدال عمل میں لانا چاہئیں۔ اس طرح آئیسے علوم جو کہ قطعہ کی صرف ایک قیمت کو ہی جو جم طہ سے حاصل ہوتی ہے ملحوظ رکھنا کافی نہیں

یہ ابداً اس امر کی اچھی مثال ہے کہ مقلوب تقاطعوں کے ساتھ عمل کرنے میں نہایت احتیاط سے کام لینا چاہئے۔ کوئی اشتباہ واقع نہیں ہوتا اگر مثال ۳ (۱) کا مکملہ مقلوب محاس کی تقویم میں استعمال کیا جائے۔

مثال ۵۔ ک $\frac{فرلا}{+بجملا + ججبلا}$ ، مثبت
 اگر $ب^۲ + ج^۲ = ک^۲$ تو ہم لکھ سکتے ہیں
 $+بجملا + ججبلا = +کجملا$ (۵-۶)
 اور مکملہ مثال (۳) کی شکل میں آجاتا ہے۔
 اگر $ک^۲ > +بجملا + ججبلا$ ہے

$$\frac{+بجملا + ججبلا}{+کجملا} = \frac{+بجملا + ججبلا}{+کجملا} = \frac{+بجملا + ججبلا}{+کجملا}$$

علامت مثبت ہوگی اگر (۵-۶) صفر اور II کے درمیان واقع ہو اور منفی ہوگی اگر یہ - II اور صفر کے درمیان واقع ہو۔

مشق ۲

مثلاً آتا ۲۲ کو بلحاظ لا کے تکمیل کرو

۱- $\frac{۱}{۲+۳+۴+۵+۶+۷+۸+۹+۱۰+۱۱+۱۲+۱۳+۱۴+۱۵+۱۶+۱۷+۱۸+۱۹+۲۰+۲۱+۲۲}$	۲- $\frac{۱}{۲+۳+۴+۵+۶+۷+۸+۹+۱۰+۱۱+۱۲+۱۳+۱۴+۱۵+۱۶+۱۷+۱۸+۱۹+۲۰+۲۱+۲۲}$	۳- $\frac{۱}{۲+۳+۴+۵+۶+۷+۸+۹+۱۰+۱۱+۱۲+۱۳+۱۴+۱۵+۱۶+۱۷+۱۸+۱۹+۲۰+۲۱+۲۲}$
۴- $\frac{۱}{۲+۳+۴+۵+۶+۷+۸+۹+۱۰+۱۱+۱۲+۱۳+۱۴+۱۵+۱۶+۱۷+۱۸+۱۹+۲۰+۲۱+۲۲}$	۵- $\frac{۱}{۲+۳+۴+۵+۶+۷+۸+۹+۱۰+۱۱+۱۲+۱۳+۱۴+۱۵+۱۶+۱۷+۱۸+۱۹+۲۰+۲۱+۲۲}$	۶- $\frac{۱}{۲+۳+۴+۵+۶+۷+۸+۹+۱۰+۱۱+۱۲+۱۳+۱۴+۱۵+۱۶+۱۷+۱۸+۱۹+۲۰+۲۱+۲۲}$
۷- $\frac{۱}{۲+۳+۴+۵+۶+۷+۸+۹+۱۰+۱۱+۱۲+۱۳+۱۴+۱۵+۱۶+۱۷+۱۸+۱۹+۲۰+۲۱+۲۲}$	۸- $\frac{۱}{۲+۳+۴+۵+۶+۷+۸+۹+۱۰+۱۱+۱۲+۱۳+۱۴+۱۵+۱۶+۱۷+۱۸+۱۹+۲۰+۲۱+۲۲}$	۹- $\frac{۱}{۲+۳+۴+۵+۶+۷+۸+۹+۱۰+۱۱+۱۲+۱۳+۱۴+۱۵+۱۶+۱۷+۱۸+۱۹+۲۰+۲۱+۲۲}$
۱۰- $\frac{۱}{۲+۳+۴+۵+۶+۷+۸+۹+۱۰+۱۱+۱۲+۱۳+۱۴+۱۵+۱۶+۱۷+۱۸+۱۹+۲۰+۲۱+۲۲}$	۱۱- $\frac{۱}{۲+۳+۴+۵+۶+۷+۸+۹+۱۰+۱۱+۱۲+۱۳+۱۴+۱۵+۱۶+۱۷+۱۸+۱۹+۲۰+۲۱+۲۲}$	۱۲- $\frac{۱}{۲+۳+۴+۵+۶+۷+۸+۹+۱۰+۱۱+۱۲+۱۳+۱۴+۱۵+۱۶+۱۷+۱۸+۱۹+۲۰+۲۱+۲۲}$

$$\begin{array}{rcl}
 ۱۳- & \text{سر لا} & ۱۳- \text{م لا} & ۱۵- \text{و جم لا + ب جب لا} \\
 ۱۶- & \text{جب لا} & ۱۴- \text{جب لا جم لا} & ۱۸- \text{جب لا جم لا} \\
 ۱۹- & \text{جب لا} & ۲۰- \text{لا لا لا} & ۲۱- \text{لا لا لا}
 \end{array}$$

۲۲- $\frac{1}{1 + \text{لا} - \text{لا}}$
 ۲۳- ذیل کے ٹکڑوں کی قیمتیں بیان کر

$$\begin{array}{l}
 (۱) \text{ جب لا فر لا} \quad (۲) \text{ جب لا جم لا فر لا} \quad (۳) \text{ جب لا جم لا + ب جب لا فر لا} \\
 (۴) \text{ جب لا جم لا} \quad (۵) \text{ جب لا مس لا فر لا} \quad (۶) \text{ جب لا + لا + لا فر لا} \\
 (۷) \text{ جب لا فر لا} \quad (۸) \text{ جب لا جم لا}
 \end{array}$$

اس کے ۲۴ نام کو بجا کر لا کے مکمل کر دو

$$\begin{array}{rcl}
 ۲۴- & \frac{1 + \text{لا}}{\text{لا} + \text{لا} + ۱} & ۲۵- & \frac{\text{لا} - ۱}{۱ + \text{لا}} \\
 ۲۶- & \frac{\text{لا} + \text{لا}}{\text{لا} - ۲} & ۲۸- & \frac{\text{لا} + ۱}{۲(۱ - \text{لا})} \\
 ۳۰- & \frac{1 + \text{لا}}{۱ - \text{لا}} & ۳۱- & \frac{\text{لا} + ۱}{\text{لا}} \\
 ۳۲- & \frac{1}{\text{لا} + \text{لا} + ۲ + ۱} & ۳۴- & \frac{1}{(۱ + \text{لا})(۱ - \text{لا})} \\
 ۳۵- & \frac{1}{(۱ - \text{لا})(۱ - \text{لا})}
 \end{array}$$

$$-۳۶ \quad \frac{1}{(۱+۱۱-۱۱)} \quad -۳۷ \quad \frac{1}{(۱-۱۱-۱۱)} \quad -۳۸ \quad \frac{1}{(۱+۱۱-۱۱)}$$

$$-۳۹ \quad \frac{1}{(۱+۱۱-۱۱)} \quad -۴۰ \quad \frac{1}{(۱+۱۱-۱۱)} \quad -۴۱ \quad \frac{1}{(۱+۱۱-۱۱)}$$

-۴۲ ذیل کے مکملوں کی قیمتیں دریافت کرو

$$(۱) \quad \frac{1}{(۱+۱۱-۱۱)} \quad (۲) \quad \frac{1}{(۱+۱۱-۱۱)} \quad (۳) \quad \frac{1}{(۱+۱۱-۱۱)}$$

$$(۴) \quad \frac{1}{(۱+۱۱-۱۱)} \quad (۵) \quad \frac{1}{(۱+۱۱-۱۱)} \quad (۶) \quad \frac{1}{(۱+۱۱-۱۱)}$$

$$(۷) \quad \frac{1}{(۱+۱۱-۱۱)} \quad (۸) \quad \frac{1}{(۱+۱۱-۱۱)} \quad (۹) \quad \frac{1}{(۱+۱۱-۱۱)}$$

$$-۴۳ \quad \frac{1}{(۱+۱۱-۱۱)} \quad \text{جب حد فرلا کی قیمت دریافت کرو}$$

$$(۱) \quad \text{جبکہ } \pi > \pi > \pi \quad (۲) \quad \text{جبکہ } \pi > \pi > \pi$$

$$-۴۴ \quad \text{اگر مثبت ہو اور ب تعداد کم ہو دے تو ابدال جم طہ} = \frac{1}{(۱+۱۱-۱۱)}$$

$$\text{ذریعہ ثابت کر دو کہ } \frac{1}{(۱+۱۱-۱۱)} = \frac{1}{(۱+۱۱-۱۱)}$$

$$-۴۵ \quad \text{جو منحنی مساوات } ۱ = ۱ \text{ (لا) سے تعبیر ہوتا ہے اُسے مرتسم کرو اور اس کے$$

$$-۴۶ \quad \text{جو منحنی مساوات } ۱ = ۱ \text{ (لا) سے تعبیر ہوتا ہے اُسے مرتسم کرو اور اس کے$$

$$-۴۷ \quad \text{جس منحنی کی قطبی مساوات } ۱ = ۱ \text{ (لا) سے مرتسم کرو}$$

$$-۴۸ \quad \text{ایک قطع ناقص کی کارٹیزی مساوات } ۱ = ۱ \text{ (لا) سے مرتسم کرو}$$

اور (۲) کی بجائے

$$\text{م} \text{ ع و فر لا} = [\text{ع و} \text{ا} \text{ر}] - \text{م} \text{ ع و فر لا} \dots\dots\dots (۴)$$

جہاں علامت $[\text{ع و} \text{ا} \text{ر}]$ سے مراد ہے کہ پہلے لا کی بجائے ب رکھا جائے پھر
ا اور دوسرے نتیجہ کو پہلے سے تفریق کیا جائے۔

اس مسئلہ ذیل سے مسئلہ کی اہمیت معلوم ہوگی۔

مثال ۱۔ $\text{م} \text{ لا} \text{جم لا} \text{فر لا}$ معلوم کرو
یہاں ہر دو لا اور جم لا کا مکمل معلوم ہو سکتا ہے، لیکن ہم فرض کرتے ہیں $\text{و} = \text{لا}$
چونکہ $\text{و} = \text{ا} \text{پس}$

$$\text{م} \text{ لا} \text{جم لا} \text{فر لا} = \text{لا} \text{جب لا} - \text{م} \text{ لا} \text{جب لا} \text{فر لا}$$

$$= \text{لا} \text{جب لا} + \text{جم لا}$$

مثال ۲۔ $\text{م} \text{ لا} \text{جم لا} \text{فر لا}$ معلوم کرو
یہاں بھی ہم فرض کرتے ہیں $\text{و} = \text{لا}$ ، چونکہ $\text{و} = \text{لا}$ ، نیا مکمل پرانے سے
زیادہ سہل ہوگا

$$\text{م} \text{ لا} \text{جم لا} \text{فر لا} = \text{لا} \text{ا} \text{جب لا} - \text{م} \text{ لا} \text{ا} \text{جب لا} \text{فر لا}$$

مسئلہ پھر استعمال ہو سکتا ہے

$$\text{م} \text{ لا} \text{ا} \text{جب لا} \text{فر لا} = \text{لا} \text{ا} \text{ا} \text{جم لا} - \text{م} \text{ لا} \text{ا} \text{ا} \text{جم لا} \text{فر لا}$$

$$= - \text{لا} \text{ا} \text{ا} \text{جم لا} + \text{م} \text{ لا} \text{ا} \text{ا} \text{جم لا} \text{فر لا}$$

$$= - \text{لا} \text{ا} \text{ا} \text{جم لا} + \text{م} \text{ لا} \text{ا} \text{ا} \text{جب لا}$$

اس لئے $\text{م} \text{ لا} \text{ا} \text{جم لا} \text{فر لا} = \text{لا} \text{ا} \text{ا} \text{جب لا} + \text{م} \text{ لا} \text{ا} \text{ا} \text{جم لا} - \text{م} \text{ لا} \text{ا} \text{ا} \text{جب لا}$

مثال ۳۔ $\text{م} \text{ فو} \text{ا} \text{جم} (\text{ب لا} + \text{ج}) \text{فر لا}$ اور $\text{م} \text{ فو} \text{ا} \text{جب} (\text{ب لا} + \text{ج}) \text{فر لا}$ معلوم
ایک مسئلہ کے دریافت کرنے کے عمل میں ہم دوسرے مسئلہ کو بھی معلوم کر لیتے ہیں۔
فرض کرو کہ

ف = $\frac{\text{ف}}{\text{ف}}$ جو $\frac{\text{ف}}{\text{ف}}$ (ب + لا + ج) فرلا = $\frac{\text{ق}}{\text{ق}}$ جو $\frac{\text{ق}}{\text{ق}}$ (ب + لا + ج) فرلا

اس صورت میں ہم کو کسی ایک جزو ضربی کے مساوی لے سکتے ہیں

ف = $\frac{\text{ف}}{\text{ف}}$ جو $\frac{\text{ف}}{\text{ف}}$ (ب + لا + ج) - $\frac{\text{ف}}{\text{ف}}$ جو $\frac{\text{ف}}{\text{ف}}$ (ب + لا + ج) [فرلا]

= $\frac{\text{ف}}{\text{ف}}$ جو $\frac{\text{ف}}{\text{ف}}$ (ب + لا + ج) + $\frac{\text{ب}}{\text{ب}}$ جو $\frac{\text{ق}}{\text{ق}}$ (ب + لا + ج) فرلا -

= $\frac{\text{ف}}{\text{ف}}$ جو $\frac{\text{ف}}{\text{ف}}$ (ب + لا + ج) + $\frac{\text{ب}}{\text{ب}}$ جو $\frac{\text{ق}}{\text{ق}}$

اس لئے $\frac{\text{ف}}{\text{ف}}$ - $\frac{\text{ب}}{\text{ب}}$ = $\frac{\text{ق}}{\text{ق}}$ جو $\frac{\text{ف}}{\text{ف}}$ (ب + لا + ج) (۱)
اسی طرح $\frac{\text{ق}}{\text{ق}}$ پر عمل کرنے سے ماہل ہوگا

ب + ف = $\frac{\text{ق}}{\text{ق}}$ جو $\frac{\text{ق}}{\text{ق}}$ (ب + لا + ج) (۲)
(۱) اور (۲) کو ف، ق کے لئے حل کرنے سے

ف = $\frac{\text{ف}}{\text{ف}}$ جو $\frac{\text{ف}}{\text{ف}}$ (ب + لا + ج) فرلا = $\frac{\text{ف}}{\text{ف}}$ جو $\frac{\text{ف}}{\text{ف}}$ (ب + لا + ج) + $\frac{\text{ب}}{\text{ب}}$ جو $\frac{\text{ق}}{\text{ق}}$ (ب + لا + ج) [فرلا]

ق = $\frac{\text{ق}}{\text{ق}}$ جو $\frac{\text{ق}}{\text{ق}}$ (ب + لا + ج) فرلا = $\frac{\text{ق}}{\text{ق}}$ جو $\frac{\text{ق}}{\text{ق}}$ (ب + لا + ج) - $\frac{\text{ب}}{\text{ب}}$ جو $\frac{\text{ق}}{\text{ق}}$ (ب + لا + ج) [فرلا]

یہ دو مکملے ریاضی طبیعیات میں خاص اہمیت رکھتے ہیں -

مثال (۴) $\frac{\text{ف}}{\text{ف}}$ - $\frac{\text{لا}}{\text{لا}}$ فرلا اور $\frac{\text{ق}}{\text{ق}}$ - $\frac{\text{لا}}{\text{لا}}$ فرلا معلوم کرو
یہاں شکل میں صرف ایک جزو ضربی ہے، لیکن ہم اکائی کو دوسرا جزو ضربی قرار دیکر اسے
ع کے مساوی کہہ سکتے ہیں، فرض کرو کہ $\frac{\text{ع}}{\text{ع}} = ۱$

اس لئے $\frac{\text{ف}}{\text{ف}}$ - $\frac{\text{لا}}{\text{لا}}$ فرلا = $\frac{\text{ق}}{\text{ق}}$ - $\frac{\text{لا}}{\text{لا}}$ فرلا - $\frac{\text{لا}}{\text{لا}}$ فرلا $\times \frac{\text{ق}}{\text{ق}}$ - $\frac{\text{لا}}{\text{لا}}$ فرلا

= $\frac{\text{ق}}{\text{ق}}$ - $\frac{\text{لا}}{\text{لا}}$ فرلا - $\frac{\text{لا}}{\text{لا}}$ فرلا (۱)

$$\frac{(لا^۲ - لا^۱) - لا^۰}{لا^۲ - لا^۱} = \frac{لا^۲}{لا^۲ - لا^۱}$$

$$\frac{لا^۰}{لا^۲ - لا^۱} =$$

اس میں بائیں جانب کی پہلی رقم خود دیا ہوا تکمیل ہے اور دوسری رقم کا تکملہ۔ واجب $\frac{لا^۰}{لا^۲ - لا^۱}$ (۱) میں درج کرو اور تکملہ کو دائیں طرف لے آؤ، ۲ پر تقسیم کرنے سے حاصل ہوگا

$$\frac{لا^۰}{لا^۲ - لا^۱} = \frac{لا^۰}{لا^۲ - لا^۱} + \frac{لا^۰}{لا^۲ - لا^۱} \text{ واجب } \left(\frac{لا^۰}{لا^۲ - لا^۱}\right)$$

یہی نتیجہ دفعہ ۷ مثال (۱) میں حاصل کیا گیا تھا۔
اسی طرح سے یہ ثابت ہو سکتا ہے کہ

$$\frac{لا^۰}{لا^۲ - لا^۱} = \frac{لا^۰}{لا^۲ - لا^۱} + \frac{لا^۰}{لا^۲ - لا^۱} \text{ لوگ } (لا^۰ + لا^۰)$$

متقابلہ کرو دفعہ ۷ مثال ۲ کے ساتھ۔

ادویکی جبروی تحویل اکثر کارآمد ثابت ہوتی ہے، اسی طرح کی تحویل مثلثی تقاضوں کو تکمیل کرنے میں استعمال کی جاتی ہے، (دفعہ ۱۰، مثال ۲، ۳)

جملہ درجہ دوم $لا^۰ + لا^۱ + لا^۲$ کو شل دفعہ ۶ تحویل کرنے اور $لا^۰ + لا^۱ = ۱$ سے

رکھنے سے ہم تکمیل کر سکتے ہیں۔

مثال ۵۔ کی لوگ لا فرلا معلوم کرو

$$\frac{لا^۰}{لا^۲ - لا^۱} = \frac{لا^۰}{لا^۲ - لا^۱} \text{ کی لوگ لا} = \frac{لا^۰}{لا^۲ - لا^۱} \text{ کی لوگ لا} = لا$$

۱۰۔ متواتر تحویل۔

مثال ۱۔ فرض کرو کہ عی = کی لا نو فرلا، تکمیل بالحصص سے

$$\text{عی} = \frac{لا^۰}{لا^۲ - لا^۱} = \frac{لا^۰}{لا^۲ - لا^۱} \text{ کی لا نو فرلا} = \frac{لا^۰}{لا^۲ - لا^۱} \text{ کی لا نو فرلا}$$

$$\text{پس ع} = \frac{\text{جب}^1 - \text{لاجم}^1}{\text{ن}} + \frac{\text{ن} - 1}{\text{ع}} \dots (1)$$

قوت نما ن بقدر ۲ کے کم ہو گیا ہے، ن کی بجائے ن - ۲ لکھنے سے

$$\text{ع} = \frac{\text{جب}^2 - \text{لاجم}^2}{\text{ن}} + \frac{\text{ن} - 2}{\text{ع}} \dots$$

$$\text{پس ع} = \frac{\text{جب}^3 - \text{لاجم}^3}{\text{ن}} + \frac{\text{ن} - 1}{\text{ع}} + \frac{\text{ن} - 2}{\text{ع}} \dots$$

اگر ن مثبت صحیح عدد ہو تو اسی طرح تحویل کو جاری رکھنے سے ہم قوت نما کو ایک بنا سکتے ہیں جبکہ ن طاق ہو اور صفر بنا سکے ہیں جبکہ ن جفت ہو۔

$$\text{ع} = \text{جب}^1 - \text{لافر}^1 = \text{جم}^1 - \text{لا اور ع} = \text{جب}^1 - \text{لافر}^1 = \text{لا}$$

اگر ن مثبت ہے لیکن صحیح عدد نہیں ہے تو ع کو یہاں تک تحویل کیا جاسکتا ہے کہ قوت نما مثبت یا منفی کسر واجب ہو جائے۔ ن کی منفی قیمتوں کے لئے دیکھو مثال ۴۔

ضابطہ (۱) کی نہایت کارآمد صورت اس وقت پیدا ہوتی ہے جبکہ کملہ کو حدود صفر اور ۲ کے درمیان لیا جائے، اس صورت میں (۱) ہو جائے

$$\text{جب}^1 - \text{لافر}^1 = \text{ع} = \left[\text{جب}^1 - \text{لاجم}^1 \right] + \left[\frac{\text{ن} - 1}{\text{ع}} \right] \dots$$

$$\text{ع} = \frac{\text{ن} - 1}{\text{ن}} \text{جب}^2 - \text{لافر}^2$$

چونکہ دوسری رقم دونوں حدود پر صفر ہوتی ہے۔ جس صورت میں ن طاق ہو ع کی آخری رقم ہوگی

$$\frac{(1 - \text{ن})(3 - \text{ن}) \dots 2 \times 2}{\text{ن}(2 - \text{ن}) \dots 3 \times 5} (- \text{جم}^1)$$

اور جس صورت میں ن جفت ہو آخری رقم ہوگی

$$\begin{aligned} & \frac{(ن-۱)(ن-۳).....(ن-۵) \times ۱}{(ن-۲)(ن-۴).....(ن-۶) \times ۲} \\ & \text{پس } \frac{۱ \times ۳ \times ۵ \times ۷ \times ۹ \times ۱۱ \times ۱۳ \times ۱۵ \times ۱۷ \times ۱۹ \times ۲۱ \times ۲۳ \times ۲۵ \times ۲۷ \times ۲۹ \times ۳۱ \times ۳۳ \times ۳۵ \times ۳۷ \times ۳۹ \times ۴۱ \times ۴۳ \times ۴۵ \times ۴۷ \times ۴۹ \times ۵۱ \times ۵۳ \times ۵۵ \times ۵۷ \times ۵۹ \times ۶۱ \times ۶۳ \times ۶۵ \times ۶۷ \times ۶۹ \times ۷۱ \times ۷۳ \times ۷۵ \times ۷۷ \times ۷۹ \times ۸۱ \times ۸۳ \times ۸۵ \times ۸۷ \times ۸۹ \times ۹۱ \times ۹۳ \times ۹۵ \times ۹۷ \times ۹۹}{۲ \times ۴ \times ۶ \times ۸ \times ۱۰ \times ۱۲ \times ۱۴ \times ۱۶ \times ۱۸ \times ۲۰ \times ۲۲ \times ۲۴ \times ۲۶ \times ۲۸ \times ۳۰ \times ۳۲ \times ۳۴ \times ۳۶ \times ۳۸ \times ۴۰ \times ۴۲ \times ۴۴ \times ۴۶ \times ۴۸ \times ۵۰ \times ۵۲ \times ۵۴ \times ۵۶ \times ۵۸ \times ۶۰ \times ۶۲ \times ۶۴ \times ۶۶ \times ۶۸ \times ۷۰ \times ۷۲ \times ۷۴ \times ۷۶ \times ۷۸ \times ۸۰ \times ۸۲ \times ۸۴ \times ۸۶ \times ۸۸ \times ۹۰ \times ۹۲ \times ۹۴ \times ۹۶ \times ۹۸ \times ۱۰۰} \\ & \text{کے جب لا فرلا} = \frac{۱ \times ۳ \times ۵ \times ۷ \times ۹ \times ۱۱ \times ۱۳ \times ۱۵ \times ۱۷ \times ۱۹ \times ۲۱ \times ۲۳ \times ۲۵ \times ۲۷ \times ۲۹ \times ۳۱ \times ۳۳ \times ۳۵ \times ۳۷ \times ۳۹ \times ۴۱ \times ۴۳ \times ۴۵ \times ۴۷ \times ۴۹ \times ۵۱ \times ۵۳ \times ۵۵ \times ۵۷ \times ۵۹ \times ۶۱ \times ۶۳ \times ۶۵ \times ۶۷ \times ۶۹ \times ۷۱ \times ۷۳ \times ۷۵ \times ۷۷ \times ۷۹ \times ۸۱ \times ۸۳ \times ۸۵ \times ۸۷ \times ۸۹ \times ۹۱ \times ۹۳ \times ۹۵ \times ۹۷ \times ۹۹}{۲ \times ۴ \times ۶ \times ۸ \times ۱۰ \times ۱۲ \times ۱۴ \times ۱۶ \times ۱۸ \times ۲۰ \times ۲۲ \times ۲۴ \times ۲۶ \times ۲۸ \times ۳۰ \times ۳۲ \times ۳۴ \times ۳۶ \times ۳۸ \times ۴۰ \times ۴۲ \times ۴۴ \times ۴۶ \times ۴۸ \times ۵۰ \times ۵۲ \times ۵۴ \times ۵۶ \times ۵۸ \times ۶۰ \times ۶۲ \times ۶۴ \times ۶۶ \times ۶۸ \times ۷۰ \times ۷۲ \times ۷۴ \times ۷۶ \times ۷۸ \times ۸۰ \times ۸۲ \times ۸۴ \times ۸۶ \times ۸۸ \times ۹۰ \times ۹۲ \times ۹۴ \times ۹۶ \times ۹۸ \times ۱۰۰} \\ & \text{کے جب لا فرلا} = \frac{۱ \times ۳ \times ۵ \times ۷ \times ۹ \times ۱۱ \times ۱۳ \times ۱۵ \times ۱۷ \times ۱۹ \times ۲۱ \times ۲۳ \times ۲۵ \times ۲۷ \times ۲۹ \times ۳۱ \times ۳۳ \times ۳۵ \times ۳۷ \times ۳۹ \times ۴۱ \times ۴۳ \times ۴۵ \times ۴۷ \times ۴۹ \times ۵۱ \times ۵۳ \times ۵۵ \times ۵۷ \times ۵۹ \times ۶۱ \times ۶۳ \times ۶۵ \times ۶۷ \times ۶۹ \times ۷۱ \times ۷۳ \times ۷۵ \times ۷۷ \times ۷۹ \times ۸۱ \times ۸۳ \times ۸۵ \times ۸۷ \times ۸۹ \times ۹۱ \times ۹۳ \times ۹۵ \times ۹۷ \times ۹۹}{۲ \times ۴ \times ۶ \times ۸ \times ۱۰ \times ۱۲ \times ۱۴ \times ۱۶ \times ۱۸ \times ۲۰ \times ۲۲ \times ۲۴ \times ۲۶ \times ۲۸ \times ۳۰ \times ۳۲ \times ۳۴ \times ۳۶ \times ۳۸ \times ۴۰ \times ۴۲ \times ۴۴ \times ۴۶ \times ۴۸ \times ۵۰ \times ۵۲ \times ۵۴ \times ۵۶ \times ۵۸ \times ۶۰ \times ۶۲ \times ۶۴ \times ۶۶ \times ۶۸ \times ۷۰ \times ۷۲ \times ۷۴ \times ۷۶ \times ۷۸ \times ۸۰ \times ۸۲ \times ۸۴ \times ۸۶ \times ۸۸ \times ۹۰ \times ۹۲ \times ۹۴ \times ۹۶ \times ۹۸ \times ۱۰۰} \\ & \text{اگر } = \text{کے جم لا فرلا} \end{aligned}$$

$$\text{تو } = \frac{\text{جم}^{\text{ن}} \text{لا جب لا}}{\text{ن}} + \frac{\text{ن} - ۱}{\text{ن}} \text{و}$$

ضابطہ سے ثابت کرنا آسان ہے یا بلا واسطہ محدود مکملہ کے مفہوم سے ظاہر ہے کہ

$$\text{کے جم لا فرلا} = \text{کے جب لا فرلا}$$

$$\text{جب لا اور جم لا کی ترتیبوں کو دیکھنے سے معلوم ہوگا کہ}$$

$$\text{کے جب لا فرلا} = ۲ \text{ کے جب لا فرلا}$$

$$\text{کے جم لا فرلا} = ۲ \text{ کے جم لا فرلا [جبکہ جفت صحیح عدد ہو]}$$

$$\text{[جبکہ ن طاق صحیح عدد ہو]}$$

اسی طرح نتائج ذیل یا اسی طرح کے اور نتائج باسانی ثابت ہو سکتے ہیں۔

$$\text{کے جب لا فرلا} = ۴ \text{ کے جم لا فرلا}$$

نیز ملاحظہ ہو قاعدہ جو مثال ۳ میں دیا گیا ہے۔

$$\text{مثال ۳۔ ف (م'ن) = کے جب لا جم لا فرلا}$$

ف (۱۰) پر اگر م جفت ہو۔
 اگر ن جفت ہو تو (۱۱) سے ف (م) ن تکملہ ف (م) پر موقوف ہوتا ہے
 لیکن ف (م) مثال ۲ کا تکملہ ہے جبکہ ن کی بجائے م لکھا جائے پس مثال ۲
 (۱) سے ف (م) تکملہ ف (۱۰) پر منحصر ہوتا ہے اگر م طاق ہو اور ف (۱۰) پر منحصر ہوتا ہے اگر م جفت ہو۔
 پس ف (م) ن تحویل کے بعد ذیل کے چار تکملوں میں سے کسی ایک پر موقوف ہو سکتا ہے۔

ف (۱۱) = کس ص فرلا = ۱/۲ جب لا ف (۱۰) = کس ص فرلا = جب لا
 ف (۱۰) = کس ص فرلا = جم لا ف (۱۰) = کس ص فرلا = لا
 اگر تکملہ کو حدود صفر اور ۲ کے درمیان محسوب کیا جائے تو مندرجہ بالا چار تکملوں کی
 قیمتیں بالترتیب ہوتی ہیں ۱/۲، ۱، ۱، ۱/۲
 غالب علم اب ثابت کرے کہ ذیل کا قاعدہ درست ہے

ک جب لا جم لا فرلا = (۱-۲)(۳-۲)(۱-۲).....(۵-۲)(۳-۲)(۱-۲).....(۵-۲)(۳-۲)(۱-۲).....
 (۳+۲)(۱+۲).....(۵+۲)(۳+۲)(۱+۲).....
 جہاں ص = اسوائے اس صورت کے جبکہ م اور ن دونوں جفت صحیح عدد ہیں،
 موزاں صورت میں ص = ۲، مخفی نہ رہے کہ اوپر اور نیچے کے تینوں سلسلوں کے آخری
 ضربی کو اس حد تک جاری رکھنا چاہئے جب تک کہ مثبت رہیں۔ یہ بھی دیکھا جائے کہ ہر سلسلہ
 کے اجزاء بقدر ۲ کم ہوتے ہیں۔ اس قاعدہ میں مثال ۲ کے مکملے بھی شامل ہیں جو م
 (یا ن) کو صفر بنانے اور مخفی اجزائے ضربی کو حذف کرنے سے حاصل ہو سکتے ہیں۔

$$\frac{\pi}{32} = \frac{\pi}{2} \times \frac{1 \times 3 \times 1}{2 \times 4 \times 2} = \text{ک جب لا جم لا فرلا}$$

$$\frac{\pi^3}{512} = \frac{\pi}{2} \times \frac{1 \times 3 \times 1 \times 3 \times 5}{2 \times 4 \times 2 \times 4 \times 2 \times 4} = \text{ک جب لا جم لا فرلا}$$

$$-۱۷ \quad ۱۲+۳+۲ \quad ۱۸ \quad ۱۲-۱۱-۱۰ \quad -۱۹ \quad ۱۲+۱۱+۱۰$$

$$-۲۰ \quad \frac{۱۰}{۱۱-۱۲} \quad -۲۱ \quad \frac{۱۱+۱۰}{۱+۱۱}$$

$$-۲۲ \quad \text{فولہ جم ۴ لا} \quad -۲۳ \quad \text{جم ۱۱ لا} \quad -۲۴ \quad \text{جم ۱۱ لا} \quad -۲۵ \quad \text{جم ۱۱ لا}$$

-۲۵ ذیل کے مکملوں کو محسوب کرو

$$(۱) \quad \text{جم ۱۱ لا فرلا} \quad (۲) \quad \text{جم ۱۱ لا فرلا}$$

$$(۳) \quad \text{جم ۱۱ لا فرلا} \quad (۴) \quad \text{جم ۱۱ لا فرلا}$$

$$(۵) \quad \text{جم ۱۱ لا فرلا} \quad (۶) \quad \text{جم ۱۱ لا فرلا}$$

-۲۶ مشتقی ابدال سے ذیل کے مکملوں کی قیمتیں محسوب کرو

$$(۱) \quad \text{لا ۱۱ لا فرلا} \quad (۲) \quad \text{لا ۱۱ لا فرلا}$$

$$(۳) \quad \text{لا ۱۱ لا فرلا}$$

$$-۲۷ \quad \text{جم ۱۱ لا فرلا} \quad \frac{۱۱-۱۰}{۱+۱۱} \quad \text{فرلا کو مکمل کرو۔ درج کرو لا} = \text{جم ۲ طہ}$$

$$-۲۸ \quad \text{اگر ف (م کن) = لا ۱۱ لا فرلا تو ثابت کرو کہ}$$

$$\text{ف (م کن) = } \frac{۱۱-۱۰}{۱+۱۱} + \frac{۱۱-۱۰}{۱+۱۱} \quad \text{ف (م کن) = ۱}$$

اس طرح ابدال لا = جم ۲ طہ سے مکمل

$$\text{لا ۱۱ لا فرلا}$$

کی قیمت معلوم کر دیں جہاں m ، n دونوں مثبت صحیح عدد ہیں۔

۲۹۔ اگر $\epsilon_n = \int \frac{فرلا}{(لا^۲ + لا^۱)^n}$ تو ثابت کرو کہ

$$\epsilon_n = \frac{لا}{(۲-۵۲) لا^۱ (لا^۲ + لا^۱)^{n-۱}} + \frac{۳-۵۲}{لا^۱ (۲-۵۲)^{n-۱}}$$

۳۰۔ اگر $\epsilon_n = \int لا^۱ \sqrt{لا^۲ - لا^۱} فرلا$ تو ثابت کرو کہ

$$\epsilon_n = - \frac{لا^۱ (لا^۲ - لا^۱)^{n-۱}}{۲ + ۵} + \frac{۱-۵}{۲ + ۵} \epsilon_{n-۲}$$

۳۱۔ اگر $\epsilon_n = \int لا^۱ \sqrt{لا^۲ - لا^۱} فرلا$ تو ثابت کرو کہ

$$\epsilon_n = - \frac{لا^۱ (لا^۲ - لا^۱)^{n-۱}}{۲ + ۵} + \frac{۱ + ۵۲}{۲ + ۵} \epsilon_{n-۲}$$

لکھو $\epsilon_n = \int لا^۱ \{ (لا - لا^۱) فرلا \} = \frac{۱}{۲} \epsilon_{n-۲} - \frac{۱}{۲} \epsilon_{n-۴}$ جہاں $n = ۲$ اور $n = ۱$ اور $n = ۰$ کے لیے ϵ_n کی قیمتیں فراہم کر دیں۔

۳۲۔ اگر $\epsilon_n = \int \frac{فرلا}{لا^۱ (لا^۲ - لا^۱)^n}$ تو ثابت کرو کہ

$$\epsilon_n = - \frac{لا^۱ \sqrt{لا^۲ - لا^۱}}{ن} + \frac{۱-۵۲}{ن} \epsilon_{n-۲}$$

۳۳۔ اگر m ، n مثبت صحیح عدد ہوں تو مکمل

$$\int (لا^۱ - لا^۱) فرلا$$

کی قیمت دریافت کرو۔

۳۴۔ مفصلہ ذیل کی قیمتیں معلوم کرو

$$(۱) \text{ کُر } (۱۲ - ۱۱ - ۱۰) \text{ فلا } (۲) \text{ کُر } (۱۲ - ۱۱ - ۱۰) \text{ فلا}$$

$$۳۵۔ \text{ زائد } \frac{۱۲}{۱۱} - \frac{۱۱}{۱۰} = ۱ \text{ پر ایک نقطہ (ضیا کا) ہے}$$

اس کا فضلہ و مر اور معین مر کا ہے اور ضیا کا دونوں مثبت ہیں، اگر ک کے قریب کا رائس (ہو تو ثابت کرو کہ رقبہ ا مر کا

$$= \frac{۱}{۲} \text{ ضیا کا} - \frac{۱}{۲} \text{ رب لوک} \left(\frac{۱۲}{۱۱} + \frac{۱۱}{۱۰} \right)$$

اور قطع و ان کا رقبہ ہے

$$\frac{۱}{۲} \text{ رب لوک} \left(\frac{۱۲}{۱۱} + \frac{۱۱}{۱۰} \right)$$

$$۳۶۔ \text{ منحنی ما} = (۱۱ - ۱۰) (۱۲ - ۱۱) \text{ کو مر قسم کرو اور اس کے بند طے کا رقبہ دریافت کرو۔}$$

$$۳۷۔ \text{ منحنی ا} = (۱۲ - ۱۱) (۱۱ - ۱۰) \text{ کو مر قسم کرو جہاں مثبت ہے اور تمام رقبہ جو اس سے گھرا ہوا ہے اسے معلوم کرو۔}$$

$$۳۸۔ \text{ زنجیرہ ما} = \frac{۱}{۲} (۱۲ - ۱۱) \left(\frac{۱۲}{۱۱} + \frac{۱۱}{۱۰} \right) \text{ کی توس کا طول معلوم کرو جبکہ توس}$$

کو منحنی پر کے نقطہ ج سے ناپنا شروع کیا جائے جہاں $(۱۱ - ۱۰) = ۰$ ، ثابت کرو کہ جو رقبہ دونوں محوروں کے منحنی اور ک پر کے معین کے درمیان گھرا جاتا ہے وہ توس ج کا اگنا ہے۔

$$۳۹۔ \text{ خط صنوبری (قلب نما) ر} = (۱۱ - ۱۰) \text{ جم طما کی توس کا طول معلوم کرو جبکہ توس کو مبدأ سے ناپا جائے۔}$$

$$۴۰۔ \text{ لوبی ر} = \text{طما کی توس کا طول معلوم کرو اس شرط کے ماتحت کہ اس} = \text{جبکہ ر} = ۰$$

۴۱۔ بولیں $r = \frac{1}{n}$ تو n ہماری قوس کا طول معلوم کرو
جیکہ $n = 1$ اگر $r = 1$ ۔

۱۱۔ جزوی کسور۔ کسی منطق کسور کو جزوی کسور میں تحلیل کرنے کے طریقوں کے

مختلف ہیئت جبر و مقابلہ کی اکثر کتب نصاب میں ملے گی، اس نظریہ کی مفصل بحث کے لئے طالب فہم کتب میں سے جبر و مقابلہ حصہ اول، باب ہشتم کی طرف رجوع کرے یہاں ہم صرف چند مثالیں جان کر دیتے۔ مجوزہ کسور کو کسور واجب فرض کیا جائیگا یعنی یہ فرض کیا جائیگا کہ اس کے تمام کنندہ کا درجہ نسب نامہ کے درجہ کی نسبت کم ہے، نیز یہ بھی فرض کیا جائیگا کہ کسور مفرد ترین رقوم میں بیان کر لی گئی ہے۔

فرض کرو کہ مجوزہ کسور $\frac{f}{a}$ ہے جہاں f (۱) اور a (۱) کے منطق

مجموع تفاعل ہیں۔ f (۱) کو حقیقی مفرد اجزائے ضربی کے حاصل ضرب کی شکل میں تحلیل کر لیا جاسکتا ہے جہاں ہر ایک جزو ضربی (۱) کا خطی تفاعل ہو یا دو درجی لیکن خواہ یہ خطی ہو یا دو درجی یہ اس حاصل ضرب میں کسی مرتبہ تکرا رہا جاسکتا ہے۔

$\frac{f}{a}$ کو جزوی کسور کے مجموعہ میں ایک اور صرف ایک طرح تحلیل کر سکتے ہیں، یہ جزوی کسوریں ذیل کے نمونوں پر مشتمل ہوں گی۔

(۱) $\frac{f}{a}$ کے ہر ایسے خطی جزو ضربی $\frac{1}{a}$ کے مماثل جو تکرا رہیں

پانا جزوی کسور اس شکل $\frac{1}{a}$ کی ہوں گی۔

(۲) $\frac{f}{a}$ کے ہر ایسے خطی جزو ضربی $\frac{1}{a}$ کے مماثل جو r مرتبہ تکرا رہا ہے r جزوی کسوریں ذیل کی شکلوں پر مشتمل ہوں گی

$\frac{1}{a} + \frac{1}{a} + \dots + \frac{1}{a}$ (۱-۱) (۱-۱) (۱-۱) (۱-۱) (۱-۱)

(۳) $\frac{f}{a}$ کے ہر ایسے ثنائی جزو ضربی $\frac{1}{a}$ جہاں a کے مماثل جو تکرا رہا

نہیں پاتا جزوی کسر اس شکل $\frac{ج + لا + ح}{لا + ج + لا + لا}$ کی ہوگی۔

(۳) $\frac{ج + لا}{لا}$ کے ہر ایسے ثنائی جزو ضربی $(\frac{لا + ج + لا + لا}{لا})$ کے مثل جو کہ مرتبہ تکرار پاتا ہے ر جزوی کسیر ذیل کی شکلوں پر مشتمل ہونگی

$\frac{ج + لا + ح}{لا + ج + لا + لا} + \frac{ج + لا + ح}{لا + ج + لا + لا} + \dots + \frac{ج + لا + ح}{لا + ج + لا + لا}$
سروں $\frac{ج + لا + ح}{لا}$ وغیرہ کے دریافت کرنے کا طریقہ ذیل کی مثالوں سے معلوم ہوگا۔

مثال ۱۔ $\frac{لا}{(لا - ۱)(لا - ۲)}$ ، نسب نماییں کوئی جزو ضربی تکرار نہیں پاتا، اسلئے
$$\frac{لا}{(لا - ۱)(لا - ۲)} = \frac{ج}{۲ - لا} + \frac{ح}{۱ - لا} + \frac{ا}{۱ + لا}$$

کسروں سے خالی کرو۔ اس طرح

$لا = ا(لا - ۱)(لا - ۲) + ح(لا - ۱)(لا - ۲) + ج(لا - ۱)(لا - ۲)$
یہ مساوات متطابق ہے، یہ لاکھ لاکھ ایسی قیمت کے لئے پوری ہوگی جسے ہم مساوات میں درج کریں۔ رکھو $لا = ۱$ یعنی $لا = ۱$ ، اس طرح $ح$ اور $ج$ والی رقمیں صفر ہو جاتی ہیں اور ہمیں حاصل ہوتا ہے
 $۱ = ا(۱ - ۱)(۱ - ۲) = ا(۰)(۱) = ۰$ یا $ا = ۰$
اسی طرح رکھو $لا = ۲$ ، اس سے $ح = ۰$ اور رکھو $لا = ۲$ تو $ج = ۲$ اور

$$\frac{لا}{(لا - ۱)(لا - ۲)} = \frac{۱}{۱ - لا} + \frac{۲}{۲ - لا} + \frac{۰}{۱ + لا}$$

یا $\frac{لا}{(لا - ۱)(لا - ۲)} = \frac{۱}{۱ - لا} + \frac{۲}{۲ - لا}$ معلوم کرنے کے لئے اس کے نسب نما کے ساتھ دونوں طرف ضرب دے جاؤ اور پھر رکھو $لا = ۰$ ، اس طرح

$$1 = \left[\frac{(1-a)^2}{(1-a)(2-a)} \right] \quad 1-a=0$$
 اسی طرح ہم دیکھتے ہیں کہ اگر $(1-a)$ ، $(2-a)$ کا ایک جزو ضربی ہو جو کمر انہیں پاتا
 اور اسکے مائل جزوی کسر $\frac{1}{1-a}$ ہو تو

$$1 = \left[\frac{(1-a)(2-a)}{(1-a)} \right] \quad 1-a=0$$

اگر $f(1-a) = (1-a)(2-a)$ ، $f(2-a) = (1-a)(2-a)$ ، $f(1-a) = (1-a)(2-a)$
 $f(2-a) = (1-a)(2-a) + (1-a)(2-a) = (1-a)(2-a)$
 پس $1 = \left[\frac{(1-a)(2-a)}{(1-a)(2-a)} \right] = \frac{(1-a)(2-a)}{(1-a)(2-a)} = \frac{f(2-a)}{f(1-a)}$

مثال ۲۔ $\frac{(1-a)^2 + (1-a)}{(1-a)(2-a)}$ ، کمر جزو ضربی $(1-a)$ کے مائل دو جزوی کسریں
 ہونگی اور چونکہ $(1-a)^2 + (1-a)$ کے حقیقی جزو ضربی نہیں حاصل ہو سکتے اس لئے اس کے
 مائل نمونہ (۳) کی کسر ہوگی۔ پس

$$\frac{(1-a)^2 + (1-a)}{(1-a)(2-a)} = \frac{1}{(1-a)} + \frac{(1-a)}{(1-a)(2-a)} + \frac{(1-a)}{(1-a)(2-a)}$$

خالی کرنے سے حاصل ہوگا

$(1-a)^2 + (1-a) = 1 + (1-a) + (1-a)^2$ ، $(1-a)^2 + (1-a) = 1 + (1-a) + (1-a)^2$
 رکھو $1 = 1$ ، حاصل ہوتا ہے $1 = 1$ ، $(1-a)^2 + (1-a) = 1 + (1-a) + (1-a)^2$ ، $(1-a)^2 + (1-a) = 1 + (1-a) + (1-a)^2$
 کہنے سے تحویل کرو۔ اب بائیں جانب $(1-a)$ جزو ضربی ہے اور چونکہ یہ مساوات متبادل
 ہے اسلئے $(1-a)$ دائیں جانب کے تحویل شدہ جملہ کا جزو ضربی ہونا چاہئے۔

اگر ایسا نہیں ہے تو عمل میں کوئی غلطی ہے۔ پس

$(1-a)^2 + (1-a) = 1 + (1-a) + (1-a)^2$ ، $(1-a)^2 + (1-a) = 1 + (1-a) + (1-a)^2$
 $(1-a)^2 + (1-a) = 1 + (1-a) + (1-a)^2$ ، $(1-a)^2 + (1-a) = 1 + (1-a) + (1-a)^2$

جانب لے جاؤ اور پھر (۱-۱) پر تقسیم کرو۔

تب ۱-۳ = ج + لا + ک

چونکہ یہ مساوات متساویہ ہے اسلئے ج = ۱، ک = ۳، اسلئے

$$\frac{۱}{۱-۱} + \frac{۳}{۱-۱} = \frac{۲+لا+ک}{(۱-۱)^۲(۱+لا+ک)}$$

مثال ۳۔ چونکہ نسب نامہ کے حقیقی اجزا نہیں ہیں اسلئے

$$\frac{۲-۳}{(۱+لا+ک)(۲+لا+ک)}$$

نمونوں (۳) اور (۴) کی رو سے

$$\frac{۲-۳}{(۱+لا+ک)(۲+لا+ک)} = \frac{۱+ک}{(۲+لا+ک)} + \frac{ج+لا+ک}{(۲+لا+ک)} + \frac{ع+لا+ف}{(۱+لا+ک)}$$

کسور خالی کرنے سے ۲-۳ = (۱+ک)(۱+لا+ک) + (ج+لا+ک)(۲+لا+ک) + (ع+لا+ف)(۱+لا+ک)

$$+ (ع+لا+ف)(۱+لا+ک)$$

رکھو لا + لا + لا = ۲۔ اور لا، لا کو اس مساوات کے ذریعہ قطعی تقاضوں میں رکھ کر

لا + لا + لا = ۱۔ لا = ۲۔ لا = ۲۔ لا = ۲۔ لا = ۲۔ اور اسلئے لا = ۲۔ اور ک = ۱۔ جس سے ۱ = ک۔ اب ۱ اور ک والی رقم کو دائیں جانب لے جاؤ اور لا + لا + لا پر تقسیم کرو جسے لازماً جزو ضربی ہونا چاہئے۔ اسلئے

$$۱ = (ج+لا+ک)(۱+لا+ک) + (ع+لا+ف)(۱+لا+ک) + (ع+لا+ف)(۱+لا+ک)$$

رکھو لا + لا + لا = ۲۔ اور پہلے کی طرح عمل کرو۔ اس طرح حاصل ہوتا ہے ج = ۱، ک = ۱۔ اسلئے لا + لا + لا پر تقسیم کرنے سے ۱ = ع + لا + ف، ع = ۱، ف = ۱۔

$$\frac{۱}{(۱+لا+ک)} + \frac{۱}{(۲+لا+ک)} + \frac{۱}{(۲+لا+ک)} =$$

ان مثالوں سے سر ۱، ک، ج وغیرہ معلوم کرنے کا طریقہ کافی طور پر واضح ہو گیا ہو گا نیز اور کئی طریقے طالب علم کو خود بخود سوجھیں گے۔ جزوی کسور کے متعلق پوری بحث

کرسٹل کے جبر و مقابلہ میں ملے گی۔ اس کا حوالہ ابرو دیا گیا ہے۔

۱۲۔ منطق تفاعلوں کا مکمل۔ اگر $\frac{فا(لا)}{ف(لا)}$ کسر واجب نہ ہو

تو عمل تقسیم ہے اس کو ایک منطق صحیح تفاعل اور ایک منطق کسر واجب کے مجموعہ کے مساوی لکھا جاسکتا ہے۔

منطق صحیح تفاعل کا مکملہ ایک منطق صحیح تفاعل ہوگا۔

$$\frac{1}{(لا-صا)} \text{ کا مکملہ } 1 \text{ لوک } (لا-صا) = 1$$

جب $\frac{جب}{(لا-صا)}$ کا مکملہ جہاں ایک سے مختلف ہے $\frac{جب}{(لا-صا)}$ ہے۔

ج $\frac{ج+ک}{لا+ج+لا+لا}$ کے مکملہ پر دفعہ ۱ میں بحث ہو چکی ہے یہ اس شکل کا ہوگا

$$لا \text{ لوک } (لا+ج+لا+لا) + صا = \frac{2(لا+ج+لا+لا)}{لا+ج+لا+لا}$$

اس نے اب ہم صرف $\frac{ج+ک}{(لا+ج+لا+لا)}$ پر غور کریں گے۔

موجودہ ہم کے جملہ کو اس شکل میں $(لا+ج+لا+لا) = صا + صا$ بنا کر لکھنے سے مکملہ ہوگا

$$\frac{ج+ک}{(لا+ج+لا+لا)} = \frac{ج+ک}{(لا+ج+لا+لا)} + \frac{ج+ک}{(لا+ج+لا+لا)} = \frac{ج+ک}{(لا+ج+لا+لا)} + \frac{ج+ک}{(لا+ج+لا+لا)}$$

عملی طور پر یہ زیادہ آسان ہے کہ $\frac{1}{لا+ج+لا+لا} = صا$ کو ابدال $صا = صا$ سے مکمل کیا جائے لیکن نظری نقطہ نظر سے تحویلی ضابطہ حاصل کرنا موجب درپیش ہوگا۔

اگر ہم $\frac{(لا + عا)}{سر}$ کو تفريق کریں تو حاصل ہوگا

$$\frac{(لا + عا)}{سر} = \frac{1}{سر} - \frac{2(1-ر)(لا + عا)}{سر}$$

$$= \frac{2(1-ر)بہا}{سر} + \frac{2(3-ر)بہا}{سر} =$$

جہاں $(لا + عا)$ مساوی سر۔ بہا کے لکھا گیا ہے۔
شکل کرنے اور ترتیب بدلنے سے

$$\frac{لا}{سر} = \frac{3-ر}{سر} + \frac{(لا + عا)}{سر} = \frac{لا}{سر}$$

اسے $\frac{ج + لا}{سر}$ کا مکمل $\frac{1}{سر}$ کے مکملہ پر جو مقلوب مثلثی تفاعل ہے منحصر ہو سکتا ہے۔

پس $لا$ کے کسی منطق تفاعل کا مکملہ منطق تفاعلوں، لوکارتموں اور مغلوب مستدیر تفاعلوں کی رقوم میں بیان ہو سکتا ہے۔

جزوی کسور کے طریقہ سے مکمل کرنے میں بہت محنت اور طول عمل ہوتا ہے، جزوی کسور میں تحلیل کرنے سے پہلے طالب علم کو یہ دیکھ لینا چاہئے کہ آیا مکملہ کسی طرح کے ابدال سے سادہ شکل میں لایا جاسکتا ہے یا نہیں۔

$$\text{مثلاً } \frac{لا}{سر} = \frac{1}{سر} - \frac{ع}{سر} \text{ جہاں } ع = لا$$

اور $ع$ والی کسر کے ساتھ عمل کرنا $لا$ والی کسر کی نسبت زیادہ آسان ہے۔

۱۳۔ غیر منطق تفاعل۔ اب ہم ایک دو ایسی صورتوں پر غور کریں گے

جن میں مکمل غیر منطق تفاعل ہے۔
(۱) جب شکل میں صرف $لا$ کی کسور قوتیں شریک ہوں تو فرض کرو کہ ان کسروں کے

نسب نمادوں کا ذواضفاف اقل ن ہے۔ پس اگر شکل میں لا = ع ن لکھا جائے تو اس ابدال سے نیا شکل ع میں منطبق ہو جائیگا۔

پس اگر لا = ع تو

$$\int \frac{لا فر لا}{(لا+۱)^۲} = \int \frac{ع^۲ \times ۲ \times فر ع}{(ع+۱)^۲} = \int \frac{ع فر ع}{(ع+۱)^۲}$$

$$۲ = \int (ع - ۱ - ۲ + ۱ - \frac{۱}{ع+۱}) فر ع$$

$$۲ = (ع - \frac{ع}{۲} - \frac{ع}{۵} + \frac{ع}{۳} - ع + سن ع)$$

$$۲ = (\frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۵} + \frac{۱}{۳} - \frac{۱}{۲} + سن ع) (لا)$$

(۲) جب شکل میں لا + ب شریک ہو لیکن کسی طرح کا اور اصم شامل نہ ہو تو ابدال لا + ب = ع سے نیا شکل ع میں منطبق ہو جائے گا۔

(۳) جب شکل میں صرت لا + ب + ج شریک ہو لیکن کسی طرح کا اور اصم شامل نہ ہو تو مکملہ ایک منطبق تفاعل کے مکملہ میں اس طرح تحویل ہو سکتا ہے صورت اول۔ فرض کرو کہ لا مثبت ہے اصم کو اس شکل میں لکھو

$$۶ = لا + ف + لا + ق = ف = ب = ق = ج$$

فرض کرو کہ لا + ف + لا + ق = ع۔ لا پس مربع اٹھانے اور لا کے لئے مل کرنے سے

$$لا = \frac{ع - ق}{ع + ۶۲} ، فر لا = \frac{(ع + ۶۲) - ۲(ع - ق)}{(ع + ۶۲)^۲}$$

$$= \frac{۲(ع + ۶۲ - ع + ق)}{(ع + ۶۲)^۲}$$

نیا شکل صریحاً \bar{e} میں منطقی ہوگا۔
 صورت دوم۔ فرض کرو کہ \bar{a} منفی ہے، \bar{a} کے حقیقی ہونے کے لئے ضروری ہے کہ
 $\bar{a} + \bar{a} + \bar{b} + \bar{c}$ کے خطی اجزائے نہری حقیقی ہوں کیونکہ اگر یہ حقیقی نہ ہوں تو
 جملہ درجہ دوم \bar{a} کی تمام حقیقی قیمتوں کے لئے منفی ہوگا اور اس لئے \bar{a} خیالی ہوگا۔
 اب چونکہ \bar{a} مثبت ہے، اس لئے ہم لکھ سکتے ہیں

$$\bar{a} = \bar{a} + \bar{a} \quad | \quad (\bar{a} - \bar{b})(\bar{c} - \bar{a})$$

تخصیص کی خاطر فرض کرو کہ $\bar{b} < \bar{c}$ (جبریہ لحاظ سے) اور فرض کرو کہ

$$\bar{e} = \bar{a} + \bar{a} \quad | \quad \frac{(\bar{c} - \bar{a})}{\bar{b} - \bar{a}}$$

$$\bar{b} = \bar{a} \quad | \quad \frac{(\bar{c} - \bar{a})}{\bar{b} - \bar{a}}$$

$$\bar{a} - \bar{c} = \frac{(\bar{b} - \bar{a})(\bar{c} - \bar{a})}{\bar{a} + \bar{a}}, \quad \bar{b} - \bar{a} = \frac{(\bar{c} - \bar{a})}{\bar{a} + \bar{a}}, \quad \bar{c} + \bar{b} = \frac{(\bar{c} - \bar{a})}{\bar{a} + \bar{a}}$$

$$\bar{a} = \bar{a} + \bar{a} \quad | \quad \frac{(\bar{c} - \bar{a})}{\bar{a} + \bar{a}}, \quad \bar{b} = \frac{\bar{c} - \bar{a}}{\bar{a} + \bar{a}}, \quad \bar{c} = \frac{2(\bar{c} - \bar{a})}{\bar{a} + \bar{a}}$$

نیا شکل صریحاً \bar{e} میں منطقی ہوگا۔
 صورت (۲) اور (۳) میں ہم فرض کر سکتے ہیں کہ سب اصلیں مثبت ہیں (دیکھو دفعہ ۱۴)

ادھر کی تحلیل سے ظاہر ہے کہ اگر \bar{a} اور \bar{b} کے مساوی ہو یا

$\bar{a} + \bar{a} + \bar{b} + \bar{c}$ کے اور شکل \bar{f} (\bar{a} ، \bar{b} ، \bar{c} ، \bar{d} ، \bar{e}) کا منطقی
 تفاعل ہو تو \bar{f} (\bar{a} ، \bar{b}) کا شکل ہر صورت میں ایک منطقی تفاعل کے شکل میں
 تحول ہو سکتا ہے اس لئے (دفعہ ۱۱) اس کے شکل میں صرف منطقی تفاعلوں کو کاربندوں
 یا مقلوب مستند تفاعلوں کی ضرورت ہوتی ہے۔
 (۴) فرض کرو کہ شکل \bar{a} ($\bar{a} + \bar{b}$ ، \bar{c}) ہے۔

(ا) اگر مثبت صحیح عدد ہو تو $(ا + ب لا)$ کو پھیلاؤ۔
 (ب) یہ اندراج کر کے دیکھو $ع = ا + ب لا$ جس سے حاصل ہوتا ہے

$$لا = \frac{ا}{ب} - \frac{ا}{(ا-ع)}، \text{ فرلا} = \frac{ا}{ع} - \frac{ا}{(ا-ع)} = \frac{ا}{ب}$$

اور تکملہ ہو جاتا ہے $\frac{ا}{ب} - \frac{ا}{(ا-ع)} = \frac{ا}{ع}$ اور $\frac{ا}{ب} = \frac{ا}{ع}$ اور $\frac{ا}{ب} = \frac{ا}{ع}$

پس اگر $\frac{ا+ع}{ب}$ مثبت صحیح عدد ہو تو جملہ ثنائی کو پھیلا یا جاسکتا ہے اور تکملہ محدود ارقام میں حاصل ہو سکتا ہے۔

(ج) اگر $\frac{ا+ع}{ب}$ مثبت صحیح عدد نہ ہو تو فرض کر دو کہ $لا = \frac{ا}{ب}$ ، تکملہ ہو جاتا ہے

$$ع - (ا + ب لا) = (ا + ب لا) - ع$$

یہاں م کی بجائے $ع - (ا + ب لا) = (ا + ب لا) - ع$ اسلئے اگر

$$ع - (ا + ب لا) = (ا + ب لا) - ع$$

عدد ہو تو تکملہ محدود ارقام میں حاصل ہو سکتا ہے۔ ابدال اس صورت میں ہوگا

$$ع = ا + ب لا = ا + ب لا$$

۱۴۔ اس بحث سے معلوم ہوگا کہ تکملہ ایک حد تک اتفاق عمل سے عام نتائج صرف دفات ۱۲ اور ۱۳ میں حاصل کئے گئے ہیں۔ ہم نے دیکھا ہے کہ تکملہ جب کبھی عمل پذیر ہو سکتا ہے تو ہمیں معلومہ شکل کو مختلف طریقوں سے چند معیاری صورتوں میں تبدیل کرنا پڑتا ہے۔ دفعہ ۱۳ کی صورتوں کے لئے بھی اکثر اوقات یہ زیادہ سہولت بخش رہا ہے کہ عام مسئلہ کو استعمال کرنے کی بجائے ہم کوئی خاص طریقہ اختیار کریں۔ نتیجوں کو تکملہ میں زیادہ دقت اس وجہ سے ہوتی ہے کہ انہیں جبر یہ اور ثنائی

اعمال میں پوری مشق اور مہارت نہیں ہوتی، معیاری صورتوں کو یاد کر لینے کے بعد متغیر کی تبدیلی اور تکملہ بالخصوص کے دو اصولوں پر حاوی ہو جانا چاہئے، لیکن یاد رہے کہ جو طالب علم ابتدائی قسم کی عقلی اور جسمی تعلیموں پر پوری قوت اور عبور نہیں رکھتا وہ خاص صورتوں میں خاص خاص ترکیبیں اختیار کرنے کی وجوہات کو سمجھنے سے قاصر رہے گا، علاوہ اس کے اسے ہر قدم پر ایسی مشکلات کا سامنا ہو گا جو احصاء (کیلکولس) کی ذات سے تعلق نہیں رکھتیں بلکہ اس کی جسمی تعلیم کی کمی اور کوتاہی کی وجہ سے پیدا ہوتی ہیں۔

تکملہ جبکہ مختصر ہو متغیر کی سمت پر۔ ایک اور طرح کی مشکل قابل توجہ ہے اور وہ یہ ہے کہ تکملہ ایک سمت کے لئے ایک شکل رکھتا ہے اور دوسری سمت کے لئے دوسری شکل مثلاً $\frac{1}{2}$ کا تکملہ لک (لا) ہے اگر لا مثبت ہو اور لوک (- لا) ہے اگر لا منفی ہو،

اس صورت میں ہم تکملہ کو اس شکل $\frac{1}{2}$ لوک لا میں لکھ سکتے ہیں جو دونوں صورتوں پر مشتمل ہے دیکھو دفعہ ۸ مثال ۳ ایک اور صورت کے لئے۔

نیز جذر کی دوہری علامت تکلیف کا باعث ہو سکتی ہے، ہم نے دیکھا ہے کہ

۱۔ $\sqrt{+}$ جب $\sqrt{+}$ کے تکملہ کی دو شکلیں اسی دوہری علامت کی وجہ سے ہیں جو

وقوع پذیر ہوتی ہے جبکہ مقلوب جیب انعام کو ماس مقلوب سے حاصل کیا جاتا ہے۔

اگر یہ مان لیا جائے کہ علامت جذر کے پہلے ہمیشہ مثبت علامت متصور کی جائیگی

تو تحویل $\sqrt{+} = \sqrt{+}$ صرف اسی صورت میں درست ہوگی

جبکہ $\sqrt{-}$ مثبت ہو، لیکن اگر $\sqrt{-}$ منفی ہو تو لازماً $\sqrt{-} = -\sqrt{+}$

مشق ۴

مثلاً آتا ۲۴ کو لحاظ لا کے تکملہ کرو۔

۳۰ لا	-۲	$\frac{۲۴ - ۲۶ - ۲۸}{۲۴ - ۲۶ - ۲۸}$	-۴
$\frac{(۳۰ - ۲۴)(۲۴ - ۲۶)}{۲۴}$	-۲	$\frac{(۲۴ - ۲۶)(۲۴ - ۲۸)}{۲۴}$	-۳
$\frac{(۳۰ - ۲۴)(۲۴ - ۲۶)}{۲۴}$	-۲	$\frac{(۲۴ - ۲۶)(۲۴ - ۲۸)}{۲۴}$	-۳

$\frac{1}{(1-x^2)^3}$	-۶	$\frac{1}{(1-x)^3}$	-۵
$\frac{1}{1+x^2}$	-۸	$\frac{1}{(1-x)^2}$	-۷
$\frac{1+x^2}{1+x^4}$	-۱۰	$\frac{1}{1+x}$	-۹
$\frac{1}{(1+x^2)(1+x^4)}$	-۱۲	$\frac{1}{1+x^2}$	-۱۱
$\frac{1}{(1+x^2)(1+x^4)}$	-۱۴	$\frac{1}{(1-x^2)(1-x^4)}$	-۱۳
$\frac{1}{1+x^4}$	-۱۶	$\frac{1}{(1-x^2)(1-x^4)}$	-۱۵
$\frac{1}{(1+x^2)(1+x^4)}$	-۱۸	$\frac{1}{(1-x^2)(1-x^4)}$	-۱۶
$\frac{1}{(1+x^2)(1+x^4)}$	-۲۰	$\frac{1}{(1-x^2)(1-x^4)}$	-۱۹
$\frac{1}{(1+x^2)(1+x^4)}$	-۲۲	$\frac{1}{(1-x^2)(1-x^4)}$	-۲۱
$\frac{1}{(1+x^2)(1+x^4)}$	-۲۴	$\frac{1}{(1-x^2)(1-x^4)}$	-۲۳

۲۵۔ مکملہ $\int \frac{1}{(1-x^2)(1-x^4)} dx$ کو تھیل کر وکیل کے ابدال کی مدد سے
 ۶ = $\frac{1}{1-x^2}$ اور اسکی قیمت معلوم کرو جبکہ ۳ = اور ۲ =
 امثلہ ۲۶ تا ۳۷ کو بطور ۱۱ کے مکمل کرو

$$\begin{array}{rcl}
 -۲۶ & \frac{\sqrt{a}}{a+1} & -۲۷ \quad \frac{1}{\sqrt{a^2+a}} \\
 -۲۹ & \frac{a}{4(a+b)} & -۳۰ \quad \frac{1}{(a+1)(a-1)} \\
 -۳۱ & \frac{1}{(a-1)(a+1)} & -۳۲ \quad \frac{1}{a + \sqrt{a^2-1}} \\
 -۳۳ & \frac{a^2}{a + \sqrt{a+b}} & -۳۴ \quad \frac{1}{(a+1)(a-1)} \\
 -۳۵ & \frac{1}{\sqrt{a+1}} & -۳۶ \quad \frac{\sqrt{a-1}}{a+1} \\
 -۳۷ & \frac{1}{a^2} &
 \end{array}$$



باب دوم

محدود تکملہ ہندی سی سوالات میں ان کا استعمال

۱۵۔ محدود تکملہ۔ اس دفعہ میں اور اگلی دو دفعات میں محدود تکملوں کے متعلق ہم چند ضروری مسائل بیان کریں گے۔

مسئلہ ۱۔ محدود تکملہ صرف اپنی حدود کا تفاعل ہوتا ہے اور یہ تکمل کے تغیر کا تفاعل نہیں ہوتا۔

تکملہ کے ہندی مفہوم پر غور کرنے سے یہ مسئلہ ظاہر ہے۔ جب تک کہ علامت فا ایک ہی تفاعل کو تعبیر کرتی ہے فا (لا) کی ترسیم جبکہ لا فصل ہو وہی ہوگی جو فا (ع) کی ترسیم ہے جبکہ ع کو فصل مانا جائے۔ اس لئے

ک فا (لا) فر لا = ک فا (ع) فر ع

نیز اگر فا (لا) = ع فا (لا) تو فا (ع) = ع فا (ع)

اور ہر دو علامات ایک ہی جملہ ف (ب)۔ ف (ا) کو تعبیر کرتی ہیں۔

مسئلہ ۲۔ ک فا (لا) فر لا = ک فا (لا) فر لا ملاحظہ ہو دفعہ ۱

مسئلہ ۳۔ اگر ا ب اور فا (لا) تکمل کی سمت کے اند لا کی ہر قیمت

کے لئے مثبت ہو تو تکملہ ک فا (لا) فر لا لازماً مثبت ہوگا اور منفی نہیں ہوگا۔ اگر فا (لا) منفی ہو تو تکملہ منفی ہوگا۔

میں
میر جاہلی صورت میں تکملہ جس رقبہ کو تعبیر کرتا ہے وہ مثبت ہے اور دوسری صورت میں

منفی۔ اگر فار (لا) وقفہ (ا'ب) میں لا کی بعض قیمتوں کے لئے صفر ہو لیکن سب قیمتوں کے لئے صفر نہ ہو تو بھی ظاہر ہے کہ یہ مسئلہ درست رہیگا۔ اسی طرح کا مشاہدہ مسائل ۶۵، ۶۷ کی صورت میں صادق آئیگا۔
مثلاً اس طرح کی مساوات

$$2 = \frac{\text{فرلا}}{2(1-\text{لا})} = \left[\frac{1}{1-\text{لا}} \right] - 1$$

مہمل ہے۔ اس اختلاف کی وجہ یہ ہے کہ مثبت شکل لا کی قیمت ۱ کے لئے جو وقفہ (۲۶۰) کے اندر واقع ہے غیر مسلسل ہے۔

مسئلہ ۴۔ $\text{فرلا} = \text{فر (لا) فرلا} + \text{فر (لا) فرلا}$
کیونکہ دائیں جانب کے کلمہ سے جو رقبہ تعبیر ہوتا ہے وہ بلحاظ مقدار اور علامت بائیں جانب کے کلموں کے مجموعہ کے مساوی ہے۔
اسی طرح

$$\text{فر (لا) فرلا} = \text{فر (لا) فرلا} + \text{فر (لا) فرلا} + \text{فر (لا) فرلا}$$

اور ایسے ہی وقفہ (ا'ب) کے حصوں کی کسی تعداد کے لئے۔
 واضح ہو کہ درمیانی اعداد ج، گ، میں سے کوئی ایک یا زیادہ عدد وقفہ کے اعداد ا'ب میں سے جوڑا ہے اُس سے بڑے اور جو چھوٹا ہے اُس سے چھوٹے ہو سکتے ہیں بشرطیکہ فار (لا) متغیر متبوع لا کی ان سب قیمتوں کے لئے بھی جو اس طرح زیر بحث آجاتی ہیں مسلسل ہو۔

مسئلہ ۵۔ اگر $\text{ا} > \text{ب}$ اور وقفہ (ا'ب) میں فار (لا) کی بڑی سے بڑی قیمت (جبرئیل لحاظ سے) ع ہو اور چھوٹی سے چھوٹی ق تو

$$\text{فر (لا) فرلا} > \text{ع (ب-لا) لیکن} < \text{ق (ب-لا)} - \text{ع-فار (لا) اور فار (لا) - ق دونوں مثبت ہیں۔ اسلئے}$$

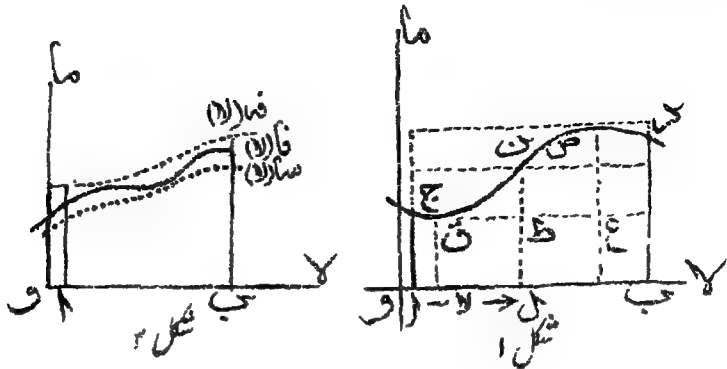
مسئلہ ۳ کی رو سے نیچلے

کے [ع-فار (لا)] فرلا اور کے [فار (لا)-ق] فرلا۔
یعنی کے ع فرلا۔ کے فار (لا) فرلا اور کے فار (لا) فرلا۔ کے ق فرلا
یا ع (ب-ا)۔ کے فار (لا) فرلا اور کے فار (لا) فرلا۔ ق (ب-ا)
دونوں مثبت ہیں۔ پس مسئلہ ع (ب-ا) سے کم ہے اور
ق (ب-ا) سے زیادہ ہے۔

مسئلہ ط (ب-ا) کے مساوی ہوگا جہاں ط ایک ایسا عدد ہے جو ع سے
کم ہے اور ق سے بڑا ہے اب چونکہ فار (لا) مسلسل ہے اسلئے یہ لاکھ ایک
قیمت لاکھ کے لئے جو ا ب کے درمیان ہے ط کے مساوی ہوگا۔ اب قیمت
لا اس شکل کی ہے ا ب ط (ب-ا) جہاں - ط > ا (دفعہ ۳،
حصہ اول) اسلئے

کے فار (لا) فرلا = فار (لا) (ب-ا) = فار (ا ب ط (ب-ا) کم (ب-ا))
یہ مسئلہ ذیل کی شکل (ا) سے واضح ہوتا ہے۔ رقبہ ا ب ح ص ج سطح
ع × ا ب سے کم ہے اور ق × ا ب سے زیادہ ہے یعنی یہ سطح
ط × ا ب یا ن ل × ا ب کے مساوی ہے جہاں
معین ل ن ع سے کم ہے اور ق سے زیادہ ہے۔

ط یا فار (لا) کو بعض اوقات سمت (ب-ا) میں فار (لا) کی
اوسط قیمت کہتے ہیں [ملاحظہ ہو دفعہ ۲۵]



سئلہ ۶۔ اگر $b > a$ اور وقفہ (a, b) میں f کی ہر ایک قیمت کے لئے $f(a)$ جبریہ لحاظ سے $f(a)$ سے کم ہو اور $f(b)$ سے بڑا ہو تو

$f(a) < f(b) < f(a)$ لیکن $f(b) < f(a)$ کی سادہ $f(a)$ فرلا

اس مسئلہ کو مسئلہ کی طرح ثابت کیا جاسکتا ہے چونکہ

$f(a) < f(b)$ اور $f(b) < f(a)$ - سادہ $f(a)$

دونوں مثبت ہیں۔ ہندسی ثبوت کے لئے دیکھو شکل (۲)

سئلہ ۷۔ $b > a$ اور $f(a)$ دو تفاعلوں $f(a)$ و $f(b)$ سے ایک یعنی $f(a)$ وقفہ کے حاصل ضرب کے سادی ہے، ان تفاعلوں میں سے ایک یعنی $f(a)$ وقفہ (a, b) میں f کی ہر ایک قیمت کے لئے مثبت ہے۔ ثابت کرو کہ

$f(a) \times f(b) < f(a)$ لیکن $f(b) < f(a)$

لیکن $f(b) < f(a)$

جہاں a اور b وقفہ (a, b) میں $f(a)$ کی (جبریہ لحاظ سے) بڑی سے بڑی اور چھوٹی سے چھوٹی قیمتیں ہیں۔

یہ مسئلہ اسی طرح ثابت ہوتا ہے جیسے مسئلہ ۶ کیونکہ $f(a) < f(b)$

اور $f(b) < f(a)$ - $f(a)$ اور $f(b)$ - سادہ $f(a)$ اور

فنا (لا) [سا (لا) - ق] مثبت ہیں
اگر وقفہ (ا، ب) سے اندر لا کی ہر قیمت کے لئے فنا (لا) منفی ہو تو
کے فنا (لا) سا (لا) فلا < ع کے فنا (لا) فلا

لیکن > ق کے فنا (لا) فلا
چونکہ سا (لا) مسلسل ہے اسلئے دونوں صورتوں میں مسئلہ کی مانند لکھتے ہیں

کے فنا (لا) سا (لا) فلا = سا (لا) کے فنا (لا) فلا (۱)
جہاں > لا > لا > ب
مسئلہ بالا کو مساوات (۱) کی صورت میں بیان ہوا ہے اوسط قیمت کا پہلا ذکر مکملی
مسئلہ کہتے ہیں۔ [ملاحظہ ہو شق ۵ سوالات ۲۹ تا ۳۱]
مثال - اگر ن < ۲ تو ثابت کرو کہ مکملہ

کے فنا فلا
بڑا ہے ۱۵ سے اور چھوٹا ہے ۱۵۲۳ سے -
مکمل کی سمت میں لا کی ہر قیمت کے لئے (سا (لا) قیمت صفر کے)
لا < لا < ۰ - ۱ - لا > ۱ - لا > ۱

$$\frac{1}{1-1} < \frac{1}{1-1} < 1$$

پس مکملہ کم ہے کے فنا فلا
جب $\frac{1}{1-1} = \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$ ۱۵۲۳ سے

لیکن بڑا ہے کے فنا ۱ = ۱۵ سے

مسئلہ ۱۔ $\text{کُ فَا (لا) فرلا} = \text{کُ فَا (ر) - (لا) فرلا}$

فرض کرو کہ لا = ع، تب فرلا = - فرع اور اگر لا = - تو ع = ر اور اگر لا = ر تو ع = ۔

$\text{کُ فَا (لا) فرلا} = - \text{کُ فَا (ر) - (ع) فرع} = \text{کُ فَا (ر) - (ع) فرع}$

اس آخری تکملہ میں ہم ع کی بجائے لا لکھ سکتے ہیں [دفعہ ۱۵، مسئلہ ۱]

اسکی کا آمد صورت یہ ہے $\text{کُ فَا (جِب لا) فرلا} = \text{کُ فَا (جِب) - [لا - (لا)] فرلا}$

$= \text{کُ فَا (جِب لا) فرلا}$

مسئلہ ۲۔ $\text{کُ فَا (لا) فرلا} = \text{کُ فَا (ر) - (لا) + فَا (لا) فرلا}$

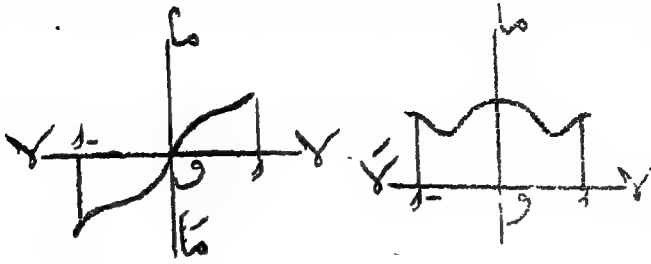
کیونکہ $\text{کُ فَا (لا) فرلا} = \text{کُ فَا (لا) فرلا} + \text{کُ فَا (لا) فرلا}$
پہلے تکملہ میں فرض کرو کہ لا = ع، اور یہ ہو جاتا ہے

- $\text{کُ فَا (ر) - (ع) فرع} = \text{کُ فَا (ر) - (ع) فرع} = \text{کُ فَا (ر) - (لا) فرلا}$

جس سے مطلوبہ نتیجہ حاصل ہوتا ہے۔

ظاہر ہے کہ $\text{کُ فَا (لا) فرلا} = ۲ \text{کُ فَا (لا) فرلا}$ اگر $\text{کُ فَا (ر) - (لا) = فَا (لا)}$

اور $\text{کُ فَا (لا) فرلا} = ۰$ اگر $\text{کُ فَا (ر) - (لا) = - فَا (لا)}$



شکل ۳

شکل ۲

مذکورہ بالا نتائج ہندی طریق پر اشکال بالا سے واضح ہوتے ہیں۔

مسئلہ ۳۔ $\{ \text{فار (لا) فرلا} \} = \{ \text{فار (لا) + فار (لا) - لا} \}$ فرلا

جس سے $\{ \text{فار (لا) فرلا} \} = ۲ \{ \text{فار (لا) فرلا} \}$ اگر $\text{فار (لا) - لا} = \text{فار (لا)}$

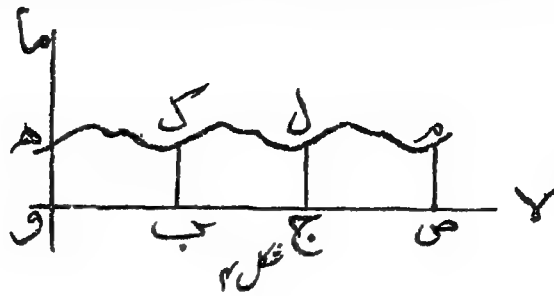
اور $\text{فار (لا) - لا} = \text{فار (لا)}$ ثبوت اسی طرح کا ہے جیسے مسئلہ ۲ کے لئے۔ وقفہ کو حصول $(۰, \frac{1}{4})$ اور $(\frac{1}{4}, ۱)$ میں تقسیم کرو اور دوسرے تکملہ میں رکھو $لا = ۱ - ع$ اس نتیجہ کی ایک خاص صورت یہ ہے

$\{ \text{ف (جب لا) فرلا} \} = ۲ \{ \text{ف (جب لا) فرلا} \}$

مسئلہ ۴۔ فار (لا) ایک دوری تفاعل ہے اور اس کا دور ۱ ہے یعنی فار (لا) - لا کی تمام صحیح قیمتوں کے لئے فار (لا) کے مساوی ہے ثابت کرو کہ

$\{ \text{فار (لا) فرلا} \} = د \{ \text{فار (لا) فرلا} \}$

جہاں د کوئی مثبت صحیح عدد ہے۔



فرض کرو کہ $وب = ا = ج = ج = ص$ ۔
 ترسیم کی نوعیت سے ظاہر ہے کہ رقبہ $وب$ کی $ج$ کی $ج$ $ص$ من
 سب مساوی ہیں پس اگر $وص = د \times وب$ تو رقبہ
 $وص$ مرہ $وب$ کی $ج$ کا دگنا ہوگا۔

یافتہ $د$ کو $د$ حصوں میں تقسیم کرو جہاں ہر حصہ کا طول $ا$ ہو۔ اس طرح

$$ک (فار لا) فر لا = ک (فار لا) فر لا + \dots + ک (فار لا) فر لا$$

$$+ \dots + ک (فار لا) فر لا$$

جس تکملہ میں حدود $ک$ $ا$ $(ک + ا)$ ہیں اس میں فرض کرو کہ $لا = ج + ک$ $ا$
 تب $فر لا = فر ج$ اور جب $لا = ک$ $ا$ $ج = ۰$ اور جب $لا = (ک + ا)$ $ا$

تو $ج = ا$ پس $ک (فار لا) فر لا = ک (فار ج + ک) فر ج = ک (فار ج) فر ج$

$$= ک (فار لا) فر لا$$

اسی طرح مندرجہ بالا $د$ تکملوں میں سے ہر ایک کی بھی قیمت ہے۔ پس نتیجہ ثابت ہوا۔
 اگر $د$ منفی ہو تو بھی نتیجہ اسی طرح کے استدلال سے ثابت ہو سکتا ہے۔

خاص صورت میں $ک (فار لا) فر لا = د ک (فار لا) فر لا$

تکملوں کی قیمت معلوم کرنے میں یہ مسائل بہت کارآمد ثابت ہوتے ہیں۔

۱۷۔ لا متناہی حدود۔ لا متناہی متکمل۔ اب تک ہم نے یہ مانا ہے کہ

تکملہ کی حدود محدود ہیں اور تکملہ سعت مفروضہ میں متغیر کی ہر قیمت کے لئے مسلسل ہے اور اس لئے محدود ہے، لیکن بعض صورتوں میں انتہاؤں کے استعمال سے ان قیود کا مساویا ممکن ہے۔
(۱) لا متناہی حدود۔ اگر کسی تکملہ کی ایک حد لا متناہی ہو تو اسکی ہم یہ تعریف اختیار کرتے ہیں۔

گز فادلا، فرلا = نہا

گز فادلا، فرلا = نہا

بشرطیکہ ہر صورت میں انتہائیں ب ← ∞ اور ا ← ∞ کے لئے محدود مقادیر ہوں۔

مثال ۱۔ گز فادلا = نہا ب ← ∞ گز فادلا = نہا ب ← ∞ (۱-۱) = ۱

مثال ۲۔ گز فادلا = نہا ب ← ∞ گز فادلا = نہا ب ← ∞

اس صورت میں لوک ب کی انتہا محدود نہیں ہے، اسلئے تکملہ بے معنی ہے۔

مثال ۳۔ گز فادلا = نہا ب ← ∞

دفعہ ۹ مثال ۳ کی رو سے اوپر کا نامحدود تکملہ ۱/۲ فادلا = نہا ب ← ∞ (جم لا جب لا) کے مساوی ہے۔ اب ہمیں ۱/۲ + ۱/۲ فادلا = نہا ب ← ∞ (جم ب جب ب) کی انتہا ب ← ∞ کے لئے معلوم کرنا ہے۔ جم ب جب ب ہمیشہ ایک سے کم رہتے ہیں اور فادلا کی انتہا صفر ہے۔ پس تکملہ ۱/۲ کے مساوی ہے۔

اس صورت میں انتہا محدود نہیں ہے اور تکملہ بے معنی ہے۔
 اگر $\frac{1}{2}$ ج $\frac{1}{2}$ اور $\frac{1}{2}$ (لا) مسلسل ہو سواں لا = ج کے لئے تو
 لا اور ج کے درمیان تکملہ مذکور کی تعریف یہ ہوگی۔
 صدہ اور صدہ دونوں مثبت ہیں

مثال ۴- $\frac{1}{2}$ فرلا = $\frac{1}{2}$ نیا۔ $\frac{1}{2}$ فرلا = $\frac{1}{2}$ نیا۔ $\frac{1}{2}$ فرلا = $\frac{1}{2}$ نیا۔
 بشرطیکہ دونوں انتہائیں الگ الگ محدود ہوں۔

مثال ۵- $\frac{1}{2}$ فرلا = $\frac{1}{2}$ نیا۔ $\frac{1}{2}$ فرلا = $\frac{1}{2}$ نیا۔ $\frac{1}{2}$ فرلا = $\frac{1}{2}$ نیا۔
 اس جگہ پہلی انتہا ۳ ہے اور دوسری بھی ۳ ہے۔ اسلئے تکملہ کی قیمت ۶ ہے۔

مثال ۶- $\frac{1}{2}$ فرلا = $\frac{1}{2}$ نیا۔ $\frac{1}{2}$ فرلا = $\frac{1}{2}$ نیا۔ $\frac{1}{2}$ فرلا = $\frac{1}{2}$ نیا۔
 اس صورت میں انتہا محدود نہیں ہے اور تکملہ بے معنی ہے۔
 لا متناہی تکمیل یا لا متناہی حدود کی وجہ سے جو مشکلات پیدا ہوتی ہیں وہ اکثر اوقات
 تغیر کی مناسب تبدیلی سے رفع ہو جاتی ہیں۔ مثلاً مثال ۲ میں $\frac{1}{2}$ فرلا = $\frac{1}{2}$ نیا جبکہ
 وقفہ کی صورت جبریہ میں تغیر کی تبدیلی بالخصوص کارگر ثابت
 ہوگی۔

فرلا کی ترسیم کے ذریعہ تکملوں کی ان سستی صورتوں کی ہندی توضیح
 ہو سکتی ہے۔ فرض کر دو کہ $\frac{1}{2}$ فرلا = $\frac{1}{2}$ نیا جہاں ن مثبت ہے۔

اس صورت میں محور لا متقابل ہے اور رقبہ ل م د ج (ن = ۱)

$$\frac{1}{2} \text{ فرلا} = \frac{1}{2} \text{ نیا} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right) \text{ ب}$$

اب اگر $\langle \text{ن} \rangle$ اتویہ رقبہ مائل بہ $\frac{(ب-۱)}{۱-ن}$ ہوتا ہے جبکہ صہ مائل بہ صفر ہو، لیکن اگر $\langle \text{ن} \rangle$ اتو رقبہ مائل بہ ∞ ہوتا ہے کیونکہ صہ $\frac{۱}{۱-ن}$ یعنی صہ $\frac{۱}{۱-ن}$ مائل بہ لامتناہی ہوتا ہے جبکہ صہ مائل بہ صفر ہو، اگر $\langle \text{ن} \rangle$ اتو رقبہ لوک $\frac{(ب-۱)}{صہ}$ کے سادی ہوتا ہے اور اس لئے یہ مائل بہ ∞ ہوتا ہے جبکہ صہ مائل بہ صفر ہو۔ مسئلہ دفعہ ۵ کی مدد سے یہ ثابت کرنا آسان ہے کہ اگر $\langle \text{ن} \rangle$ کے نزدیک $\langle \text{ن} \rangle$ کی شکل $\frac{فما (لا)}{(لا-۱)}$ ہو جہاں $فما (لا)$ مسلسل ہے تو رقبہ $\langle \text{ن} \rangle$ اور متناظر کھلمہ دونوں ایک محدود اتہا رکھتے ہیں جبکہ $\langle \text{ن} \rangle$ مثبت کسر واجب ہو لیکن اگر $فما (لا)$ صفر نہ ہو تو یہ اتہا لامتناہی ہوتی ہے جبکہ $\langle \text{ن} \rangle$ ایک کے سادی یا ایک سے بڑا ہو۔

مستثنیٰ صورتوں کی مزید بحث اس کتاب کی حدود سے باہر ہے۔

شق ۵

ذیل کے تھکوں کی قیمتیں معلوم کرو

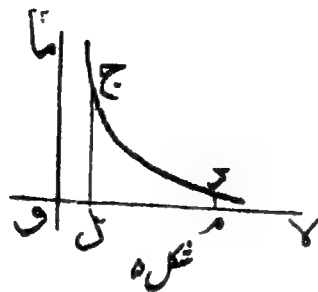
$$۱) \text{ تو } \frac{لا}{لا} \text{ جب } لا \text{ مرلا } (۱ < ۰)$$

$$۲) \text{ اگر } \langle \text{ن} \rangle \text{ مثبت ہو } \frac{لا}{لا} \text{ جب } لا \text{ مرلا } (۱ < ۰) \text{ اگر } = ۵$$

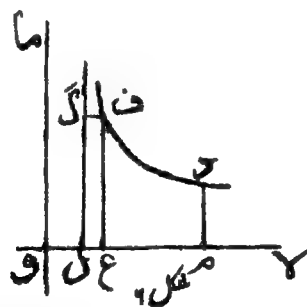
$$۳) \frac{لا}{لا} \text{ جب } لا \text{ مرلا } (۱ < ۰) \text{ اگر } = ۶$$

$$۴) \frac{لا}{لا} \text{ جب } لا \text{ مرلا } (۱ < ۰) \text{ اگر } = ۷$$

جہاں $و = ب$ اور $و = ب$



اگر $<$ اتور قبہ لی مخرج مائل $>$ $\frac{1}{(ن-۱)}$ ہوتا ہے جبکہ $ب$ مائل $>$ $\frac{1}{(ن-۱)}$ ہو لیکن اگر $>$ اتور قبہ مائل $>$ $\frac{1}{(ن-۱)}$ ہوتا ہے کیونکہ $ب$ یعنی $ب$ مائل $>$ $\frac{1}{(ن-۱)}$ ہوتا ہے۔ اگر $=$ اتور قبہ لی مخرج لوک $(\frac{1}{ب})$ کے مساوی ہے اور اس لئے $ب$ کے ساتھ مائل $>$ ہوتا ہے بخلاف اسکے فائدہ $(\frac{1}{ب}) = \frac{1}{(ن-۱)}$ پر غور کرو جہاں $ن$ مثبت ہے۔



اگر $و = ب$ لی $ع = ص$ اور $و = ب$ اتور قبہ $ع$ مخرج $ف$ $(ن \neq ۱)$

$$\int \frac{1}{(ن-۱)} = \frac{1}{(ن-۱)} \left\{ (ب-۱) - (و-۱) \right\}$$

- ۷۔ $\frac{\text{مولا}}{\text{لا (ا) (ب) لا}}$ [رکھو لا = وجہ طما + ب جب طما]
- ۸۔ $\frac{\text{مولا}}{\text{لا (ا) (ب) لا}}$ ۹۔ $\frac{\text{مولا}}{\text{لا (ا) (ب) لا}}$ (ا ب <)
- ۱۰۔ $\frac{\text{مولا}}{\text{وجہ لا + ب جب لا}}$ ۱۱۔ $\frac{\text{مولا}}{\text{وجہ لا + ب جب لا}}$
- ۱۲۔ $\frac{\text{مولا}}{\text{جم لا جب لا مولا}}$ ۱۳۔ $\frac{\text{مولا}}{\text{جم لا جب لا مولا}}$
- ۱۴۔ $\frac{\text{مولا}}{\text{ا + ز جم لا}}$ ۱۵۔ $\frac{\text{مولا}}{\text{ا + ز جم لا}}$

۱۶۔ $\frac{\text{مولا}}{\text{لا لوک لا مولا}}$

۱۷۔ اگر م اور ن مثبت ہوں تو ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{مولا}}{\text{لا (ا) (ب) لا}} = \frac{\text{مولا}}{\text{لا (ا) (ب) لا}}$$

۱۸۔ اگر ن مثبت ہو تو ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{مولا}}{\text{لا (ا) (ب) لا}} = \frac{\text{مولا}}{\text{لا (ا) (ب) لا}}$$

اگر ن مثبت صحیح عدد ہو تو اس تکرار کی قیمت معلوم کرو

$$۱۹۔ اگر ۶ = \frac{\text{مولا}}{\text{لا جب لا مولا}} \text{ تو ثابت کرو کہ}$$

$$۶ = \frac{\text{مولا}}{\text{لا جب لا مولا}}$$

اس طرح ۶ کی قیمت معلوم کرو۔

$$۲۴ - \text{ثابت کر دو کہ } \frac{فرلا}{(۳-۲)لا + (۳)لا} < \frac{۱}{۲} \text{ لیکن } > \frac{۲}{۴}$$

$$۲۵ - \text{ثابت کر دو کہ } \frac{فرلا}{(۳-۲)لا + (۳)لا} > \frac{فرلا}{(۳-۲)لا + (۳)لا} < \frac{فرلا}{۱۶}$$

$$\text{یعنی } > \frac{۲}{۳} \text{ لیکن } < \frac{۱۹}{۳۲}$$

$$۲۶ - \text{ثابت کر دو کہ } \frac{فرلا}{(۳-۲)لا + (۳)لا} < ۵.۳ \text{ لیکن } > ۵.۹۵$$

رکھو لا = ۱ + ۶، پھر ۶ + ۳ + ۶ + ۲ کی بجائے ۴ + ۶ + ۲ اور ۳ + ۶ + ۲ رکھو
۲۷ - اگر عا اور فدا دو مثبت حادے زاوے ہوں تو ثابت کر دو کہ

$$\frac{فرلا}{(۱-جبا)عجا + (۱)فدا} < \text{فدا لیکن } > \frac{فدا}{(۱-جبا)عجا + (۱)فدا}$$

اگر عا = فدا = $\frac{\pi}{۴}$ تو ثابت کر دو کہ تحلہ ۵۲۳ اور ۵۴۱ کے درمیان واقع

ہوتا ہے۔

اور طریقوں سے جن میں زیادہ صحت ممکن ہے اس تحلہ کی تقریبی قیمت
۵۲۹.۴۳ حاصل ہوتی ہے۔

۲۸ - ثابت کر دو کہ

$$(۱) \int_0^{\infty} \frac{فرلا}{(۱-جبا)عجا + (۱)فدا} > \int_0^{\infty} \frac{فرلا}{(۱-جبا)عجا + (۱)فدا} > \int_0^{\infty} \frac{فرلا}{(۱-جبا)عجا + (۱)فدا}$$

۲۹ - اس مجسم کے حجم پر غور کرنے سے جو محدودوں کی سطحوں، مستویات (لا = ۱) اور

لا = ب اور اسطوانوں ما = فدا (لا) اور می = سعا (لا) کے درمیان

گھرا ہوا ہے دفعہ ۱۵، مسئلہ کی ہندی تعبیر معلوم کرو۔

۳۰ - اگر سعا (لا) مثبت ہو اور وقفہ (لا) میں فدا (لا) مثبت گھٹنے والا

تفاعل ہو تو مثال ۲۹ کا جو مجسم ہے اسکے حجم پر غور کرنے سے ثابت کر دو کہ

(۱) $\frac{1}{2} \text{ فم (لا) سما (لا) فر (لا) = فم (لا) سما (لا) فر (لا) جہاں } \frac{1}{2} \text{ فم (لا) سما (لا) فر (لا)}$
لیکن اگر فم (لا) مثبت، بڑھنے والا تفاعل ہو تو

(۲) $\frac{1}{2} \text{ فم (لا) سما (لا) فر (لا) = فم (لا) سما (لا) فر (لا) جہاں } \frac{1}{2} \text{ فم (لا) سما (لا) فر (لا)}$

۳۱۔ اگر لڑکے و سے بیک بڑھنے سے فم (لا) بڑھے (جس پر لحاظ سے)
تو ثابت کر دو کہ مثال ۳۰ میں فم (لا) کی بجائے فم (ب)۔ فم (لا)
رکھا جاسکتا ہے، لیکن اگر فم (لا) (جس پر لحاظ سے گھٹے تو مثال ۳۰ (۲) میں فم (لا)
کی بجائے فم (ب)۔ فم (لا) رکھا جاسکتا ہے۔ ثابت کر دو کہ اگر یہ ابدال عمل میں
لائے جائیں تو ہر دو (۱) اور (۲) ہو جاتے ہیں

$\frac{1}{2} \text{ فم (لا) سما (لا) فر (لا) = فم (لا) سما (لا) فر (لا) جہاں } \frac{1}{2} \text{ فم (لا) سما (لا) فر (لا)}$

اس صورت میں فم (لا) مثبت ہو سکتا ہے یا منفی۔ اوپر کی مساوات میں جو مسئلہ بیان
ہوا ہے اسے اوسط قیمت کا دوسرا مسئلہ (تکملی) کہتے ہیں۔ یہ مسئلہ درست رہے گا اگر سما (لا)
ہر دو مثبت اور منفی قیمتیں اختیار کرے اگرچہ اس صورت میں مسئلہ کی توضیح کے لئے
مزید تشریح کی ضرورت ہوگی۔

رقبہ سے توضیح کرو جبکہ سما (لا) = ۱

دفعہ ۱۸۔ چند معیاری رقبے اور حجم۔

اس دفعہ میں ہم چند مشہور نتائج جو اس سے قبل حاصل کئے جا چکے ہیں یا باسانی
ثابت ہو سکتے ہیں جمع کر نیلے۔

(۱) قائم مستطیر اسطوانہ۔ فرض کر دو کہ قاعدہ کا نصف قطر ۱ ہے اور ارتفاع ف،

حجم = π و ف، منحنی سطح = π^2 و ف

(۲) قائم مستطیر مخروط۔ فرض کر دو کہ قاعدہ کا نصف قطر ۱ ہے، ارتفاع ف،

$$\text{ضلع مائل} = \text{ل} = \text{مائل} + \text{ف}^2$$

$$\text{حجم} = \frac{1}{3} \pi \text{ا}^2 \text{ف}^2 \text{منحنی سطح} = \pi \text{ا}^2 \text{ل}$$

مخروط ناقص کے لئے جس کا ارتفاع ف ہے، مائل ضلع ل اور سروں کے نصف قطر ا اور ب، حجم = $\frac{1}{3} \pi (\text{ا}^2 + \text{ا} \text{ب} + \text{ب}^2) \text{ف}$ منحنی سطح = $\pi (\text{ا} + \text{ب}) \text{ل}$

فرض کرو کہ اسی مخروط کے قاعدہ کا رقبہ ق ہے، ارتفاع ف اور راس سے فاصلہ لا پر قاعدہ کے متوازی جو مخروطی تراش ہے اس کا رقبہ لا ہے

$$\text{تب لا : ق} = \text{ا}^2 : \text{ف}^2$$

کیونکہ متوازی تراشیں متشابہ ہوتی ہیں۔ فرض کرو کہ اس حصہ کا حجم ح ہے جس کا قاعدہ لا ہے اور ارتفاع لا۔ پہلے رتبہ کے مناسبات تک صف ح = لا صف لا اور صف ح = لا، اس لئے کل مخروط کا حجم ہے

$$\text{لا}^3 \text{لا فر لا} = \frac{\text{ق}}{\text{ف}} \text{لا}^3 \text{لا فر لا} = \frac{1}{3} \text{ق} \text{ف}$$

مخروط ناقص کے لئے جس کا ارتفاع ف ہو اور سروں کے رتبے (ا اور ب)

$$\text{حجم} = \frac{1}{3} \pi (\text{ا}^2 + \text{ا} \text{ب} + \text{ب}^2) \text{ف}$$

(۳) کرہ۔ فرض کرو کہ کرہ کا نصف قطر س ہے۔ دفعہ ۵۵، مثال ۲ حصہ اول کی طرح اس کرہ کی ٹوپی کا حجم جس کا ارتفاع ف ہو = $\pi \text{ا}^2 \text{ف}^2 (\text{س} - \frac{1}{3} \text{ف})$ اور ٹوپی کی کرہی سطح = $2 \pi \text{ا} \text{س} \text{ف}$ ۔ اگر ان نتائج میں ف کو ۲ س کے مساوی رکھا جائے تو کرہ کا حجم اور سطح بالترتیب $\frac{2}{3} \pi \text{س}^3$ اور $2 \pi \text{س}^2$ حاصل ہوتے ہیں۔ یہ توجہ کے قابل ہے کہ کرہ کی ٹوپی کی منحنی سطح اس اسطوانہ کی منحنی سطح کے مساوی ہے جس کا ارتفاع دہی ہو جو ٹوپی کا ہے اور جس کا قاعدہ کرہ کے بڑے دائرے کے مساوی ہو اگر کرہی قطاع کا حجم معلوم کرنا ہو تو ٹوپی کے حجم میں اس مخروط کا حجم جمع کیا جاسکتا ہے

جس کا راس کرہ کے مرکز پر ہوا اور جس کا ارتفاع r - ف ہو۔ پس حجم مطلوب یہ ہے

$$\pi f^2 (r - \frac{1}{3}f) + \frac{1}{3}\pi (2rf - f^2) (r - f)$$

$= \frac{1}{3}\pi \times 2r^2 f - \frac{1}{3}\pi r f^2 = \frac{1}{3}\pi r f^2$
 جہاں میں ٹیپی کی سطح ہے۔ یہ نتیجہ زیادہ آسانی سے ثابت ہو سکتا ہے اگر ٹیپی کی سطح کو چھوٹے رقبوں کی بڑی تعداد میں تقسیم کیا ہوا فرض کریں۔ اس طرح قطع کرہ ایسے مخروطوں کی ایک بڑی تعداد سے بنا ہوا متصور ہو گا جن میں سے ہر ایک کا ارتفاع r ہے، پس قطع کا حجم اس طرح بھی $\frac{1}{3}\pi r f^2$ میں صراحت ہو گا۔

(۴) ناقص۔ ناقص کے محور 2 و 2 ب ہیں، اس کا رقبہ

$$= \pi \int_0^2 (2 - x)^2 dx = \pi [2x - \frac{1}{2}x^2]_0^2 = \pi (4 - 2) = 2\pi$$

اس کرہ نما کا حجم جو ناقص کو محور اعظم 2 کے گرد پھرنے سے حاصل ہو

$$= \pi \int_0^2 (2 - x)^2 dx = \pi [2x - \frac{1}{2}x^2]_0^2 = 2\pi$$

اس کرہ نما کو انگریزی یا لبوتر کرہ نما کہا جاسکتا ہے۔ جب گردش کا محور محور اصغر 2 ہو تو کرہ نما چپا سیب کی شکل کا ہو گا، ایسے کرہ نما کا حجم

$$= \pi \int_0^2 (2 - x)^2 dx = \pi [2x - \frac{1}{2}x^2]_0^2 = 2\pi$$

لبوتر کرہ نما کی سطح ہے

$$= \pi \int_0^2 (2 - x)^2 dx = 2\pi$$

$$\text{جہاں } \left(\frac{r}{f}\right)^2 = 1 + \left(\frac{r}{f}\right)^2 = \frac{(2 - x)^2}{(2 - x)^2} = 1$$

فرض کرو کہ ناقص کا خروج مرکز z ہے، تب $z = 2 - x$ ب

اور چونکہ $b = \sqrt{a^2 - z^2}$ اسلئے تکملہ اس شکل میں لکھا جاسکتا ہے

$$\pi a^2 \int \sqrt{a^2 - z^2} dz = \frac{\pi a^2}{2} (z \sqrt{a^2 - z^2} + a^2 \sin^{-1} \frac{z}{a})$$

اور اسکی قیمت ہے

$$\pi a^2 \left\{ \frac{1}{2} (z \sqrt{a^2 - z^2} + a^2 \sin^{-1} \frac{z}{a}) \right\}$$

ز۔ کے لئے اس جملہ کی انتہا $\pi a^2 \frac{1}{2}$ ہے جو نصف قطر کے کرہ کی سطح ہے۔
چپے کرہ نما کے لئے طالب علم دیکھے گا کہ سطح مطلوبہ ہے

$$\pi a^2 \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2} (z \sqrt{a^2 - z^2} + a^2 \sin^{-1} \frac{z}{a}) \right\} = \frac{\pi a^2}{2} \left\{ \frac{1}{2} (z \sqrt{a^2 - z^2} + a^2 \sin^{-1} \frac{z}{a}) \right\}$$

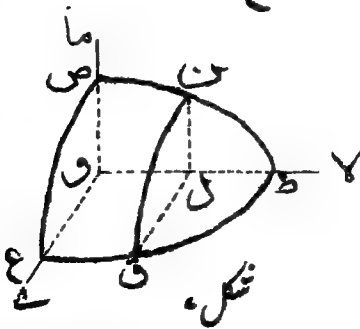
$$\pi a^2 = \left\{ \frac{1}{2} (z \sqrt{a^2 - z^2} + a^2 \sin^{-1} \frac{z}{a}) \right\}$$

$$\text{چونکہ } \frac{1}{2} \text{ لوک } \frac{1}{z-1} = \text{لوک } (z+1) + \text{لوک } (z-1) \text{۔}$$

اسلئے یہاں $\frac{1}{2} \text{ لوک } \frac{1}{z-1} = \text{لوک } (z+1) + \text{لوک } (z-1)$ (دفعہ ۴ حصہ اول نتیجہ صریح)

پس ز۔ کے لئے اس رقبہ کی انتہا $\pi a^2 \frac{1}{2}$ ہے۔

$$(۵) \text{ ناقص نما } \frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}$$



محدودوں کی مستوی سطحوں پر اس
منحنی سطح کی تراشیں ناقص ہیں،
سطح صاف کے متوازی
مستوی تراش لی ن ق ہے
جو قطع ناقص ہے۔ اگر
ف ل = لا تو

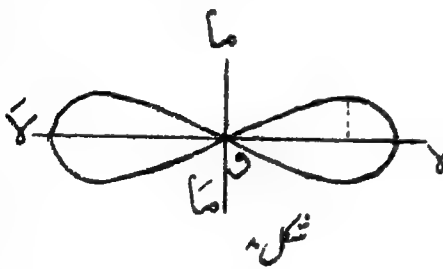
- (۱) تشاغل دیکھنے کی غرض سے مساوات کا معائنہ کیا جائے۔
- (۲) یہ دیکھا جائے کہ منحنی محوروں کو کہاں عبور کرتا ہے۔
- (۳) λ کی (یا μ کی) وہ محدود قیمتیں معلوم کی جائیں جو μ کو (یا λ کو) لامتناہی بنادیتی ہیں۔ یہ قیمتیں یا عموم ان متغیروں کو ظاہر کرینگی جو محوروں کے متوازی ہیں۔
- مثلاً متغایر سادہ صورتوں میں دفعہ ۲۴ یا دفعہ ۱۰۶ حصہ اول کے طریقوں سے حاصل ہو سکتے ہیں، لیکن ایسی صورتوں کی تفصیلی بحث اس کتاب کی حدود سے باہر ہے۔
- (۴) ایک محدود کی وہ قیمتیں معلوم کی جائیں جو دوسرے محدود کی متناظر قیمتوں کو خیالی بنادیتی ہیں۔
- (۵) منحنی کا ذوال دریافت کیا جائے (ملاحظہ ہو دفعہ ۵۴ حصہ اول)۔ نیز موڑ پر سکے نقطے معلوم کئے جائیں۔
- (۶) دوسرے مشتق معلوم کیا جائے۔ اس سے قوس کے تقعر اور تحدب نیز اس کے نقاط انعطاف کا پتہ چلیگا، لیکن دوسرے مشتق کے معلوم کر نیکار عمل اکثر اوقات دشوار اور محنت طلب ہوتا ہے اور منحنی کا عام طریق بغیر سکی مدد کے عام تخیلات کی بنا پر بخوبی معلوم ہو سکتا ہے۔
- قطبی مساواتوں کے لئے بھی طرز عمل ایسا ہی ہے۔ اس میں اکثر اوقات سہولت ہوگی کہ سمتی نیم قطر کو منحنی بھی مایا جاسکے۔ مثلاً نقطہ (۱-، ۱-) تیسرے ربع میں واقع ہے، اسکے قطبی عدد (۲۱، ۲۵) یا (۲۱، ۲۵) دونوں ہو سکتے ہیں۔ دوسری شکل (۲۱، ۲۵) کے یہ معنی ہیں۔ فرض کرو کہ λ و μ کے مساوی ہے۔ اور $\lambda = 21$ و $\mu = 25$ کو λ و μ میں سے ایک تک اتنا خارج کیا جائے کہ λ و μ تب تک مطلوبہ نقطہ (۲۱، ۲۵) ہوگا۔ (ملاحظہ ہو مشتق ۶، مثال ۲۳)

رقبہ یا توس کا طول نکلنے سے پہلے منحنی کی عام شکل معلوم کر لینی چاہئے۔ تکملوں کے حل کرنے میں ابدالوں سے کام لینا پڑے گا، طالب علم یاد رکھے کہ ابدال کے مناسب انتخاب سے عمل میں بہت سہولت واقع ہوگی۔ خواہ منحنی کی مساوات قائم محدودوں میں ہو بعض اوقات اسے قطبی محدودوں میں تبدیل کر لینے سے عمل تکمل میں اختصار پیدا ہوگا۔

مشق ۶

۱۔ مکانی ما' = ۲ لا محور کا کے گرد گھومنے سے مجسم پیدا کرتا ہے، ایک مستوی سطح نقطہ لا = ہڈ میں سے محور کا پر عمود وار گذرتی ہے اور اس مجسم کو کاٹتی ہے۔ مقطوعہ کا حجم اور اسکی منحنی سطح معلوم کرو۔
۲۔ محور کا پر کے نقطہ لا = ہڈ میں سے ایک مستوی سطح محور کا پر عمود وار گذرتی ہے اور مکانی ما' = $\frac{ب}{ج} + ۲$ لا کو قطع کرتی ہے۔ محدود مقطوعہ کا حجم دریافت کرو۔

۳۔ منحنی لا' ما' + ب' لا = لا' ب' لا (شکل ۸) جو رقبہ گھیرتا ہے اسے معلوم کرو۔



دونوں محوروں کے گرد تشاکل

لا' \geq لا'، ما کی قیمت اعظم = $\frac{ب}{۲}$

محور کا کے گرد گھومنے سے منحنی جو مجسم پیدا کرتا ہے اسکا حجم دریافت کرو۔

۴۔ منحنی ج' ما' = لا' لا' (لا - لا) (ب - لا) سے جو رقبہ گھیرتا ہے اسے معلوم کرو۔ ب' $<$ لا' < .

اگر لا کم ہو لا سے یا بڑا ہو ب سے تو ما خیالی ہوتا ہے، سو اسے

لا۔ کے جبکہ ما۔ اسٹے یہ بند نخی ہے اور محور لا کے گرد متساکل ہے۔ مبدا نخی پر واقع ہے۔
مگر اس کے نزدیک کوئی اور نقطہ ہیں۔ یہ اکیلا نقطہ کہلاتا ہے۔

۵۔ منحنی $(\lambda + \mu) = \lambda^2 + \mu^2$ کا تشریحی معلوم کرو۔

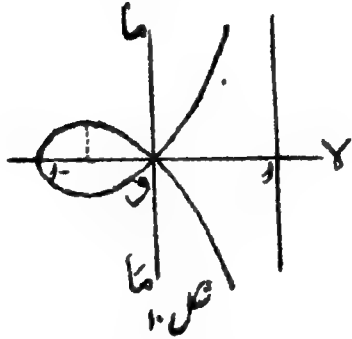
قطبی محدودوں میں لے جاؤ۔ سید اُم کیلا نقطہ ہے۔

۶۔ منحنی ب ماً = لا (لا - لا) (لا - لا) کو مترسم کرو جہاں ا و ب دونوں مثبت ہیں۔

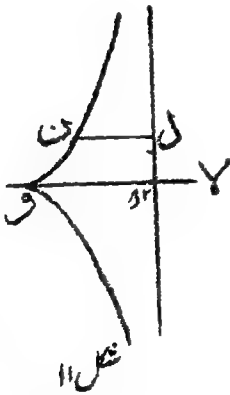
معنی ایک لامتناہی شلخ اور ایک بیضوی حلقہ پر مشتمل ہے دیکھو شکل ۹

۷۔ منحنی ۱۶ و ۱۷ = بی' لا (۱-۲-۳-۴)

۹۔ منحنی $MA(1-L) = LA^2(1+L)$ کو مرتسم کرو (۱) اسکے حلقہ کار قتبہ
(۲) منحنی اور متقارب کے درمیان کار قتبہ معلوم کرو۔ شکل ۱۰۔



اس منحنی کا ڈھال سفر ہے جبکہ $LA(1+L)$ کے مساوی ہو سکتا ہے۔
 $LA(1+L) = \frac{1}{4}$ کے لئے MA پائی جاتا ہے۔
۱۰۔ ایک منحنی کی مساوات $MA(1+L) = LA^2$ ہے، اس منحنی اور اس کے
مقارب کے درمیان جو رقبہ گھرا ہوا ہے اسے معلوم کرو شکل ۱۱۔



نیز اس منحنی کو اس کے مقارب کے گرد
گھمانے سے جو مجسم پیدا ہوتا ہے اسکا
حجم دریافت کرو۔
اگر $MA(1+L) = LA^2$ مقارب پر عمود
ہو تو حجم معلوم کیا ہے

۲۔ $MA(1+L) = LA^2$ کو
تکمل کرنے کے لئے لکھو

$LA = 2$ جب MA طے نہ ہو $MA = \frac{2}{L}$ جب MA طے نہ ہو

اور طما کے حدود ہیں۔ اور $\frac{3}{4}$

۱۱۔ منحنی لا^۱ ما^۱ = لا^۱ (لا^۱ - لا^۱) اور اس کے متقارب کے درمیان جو رقبہ گھرا ہوا ہے اسے معلوم کرو نیز منحنی کے متقارب کے گرد گردش کرنے سے جو جسم پیدا ہوتا ہے اس کا حجم معلوم کرو۔

۱۲۔ منحنی ما^۱ (لا^۱ + لا^۱) = لا^۱ (لا^۱ - لا^۱) کے ملحقہ کا رقبہ معلوم کرو۔
۱۳۔ ایک ربع دائرہ کا نصف قطر لا^۱ ہے اس کے سروں پر تماس کھینچے گئے ہیں قوس ربع اور تماسوں کے درمیان جو شکل بنتی ہے اسکو ایک تماس کے گرد پھرنے سے جو جسم پیدا ہوتا ہے اس کا حجم دریافت کرو۔

۱۴۔ ایک قوس دائرہ جس کا نصف قطر لا^۱ ہے اپنے وتر کے گرد گھوم کر ایک جسم پیدا کرتی ہے اگر قوس کا طول لا^۲ ۱۵ ہو تو ثابت کرو کہ جسم کا حجم $\frac{1}{2}$ (جب ۱۵ - ۱۴) ہے اور جسم کی سطح $\frac{1}{2}$ (جب ۱۵ - ۱۴) حجم ۱۵ ہے۔

۱۵۔ اگر منحنی لا^۱ - ما^۱ = لا^۱ کی قوس کا طول ۱۵ ہو تو ثابت کرو کہ

$$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{2}}} \quad \text{یا} \quad \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{2}}} + \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{2}}} - \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{2}}}$$

دکھاؤ کہ قوس کا طول ابتدائی تفاعلوں کی رقوم میں بیان ہو سکتا ہے جبکہ ذیل کی کسی صورت کا ہو $\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{2}}} + \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{2}}} - \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{2}}}$ جہاں ک کوئی عدد صحیح ہے مثبت یا منفی۔

۱۶۔ (لا^۱ + لا^۱) کی ترسیم اور محور لا کے درمیان کا رقبہ معلوم کرو۔

۱۷۔ منحنی (لا^۱ / لا^۱) + (لا^۱ / لا^۱) = ۱ سے جو کل رقبہ گھرا ہوا ہے اسے معلوم کرو۔

رکھو لا = ا جب طما تب ما = ب حجم طما اور رقبہ ہے

$$\frac{1}{2} \text{ ما} = لا = ۱۲ \text{ اب } \frac{1}{2} \text{ (جب طما حجم طما مرطما} = \frac{3}{8} \text{ اب } \frac{1}{2}$$

۱۸۔ خط تدویر قیل کی مساواتوں سے حاصل ہوتا ہے (دفعہ ۳۷)

$$\text{لا} = \text{ا} \text{ (طما - جب طما) } \text{ما} = \text{ا} \text{ (۱ - جم طما)}$$

(۱) منحنی کے ایک محراب اور محور کا کے درمیان کا رقبہ معلوم کرو۔

(۲) محراب کا طول طما = سے طما = $\frac{1}{2}$ تک دریافت کرو۔

(۳) محراب کو محور کا کے گرد گھمانے سے جو مجسم پیدا ہوتا ہے اس کا حجم معلوم کرو۔

(۴) محراب کو اس کے رأس پر کے ماس کے گرد گھمانے سے جو مجسم پیدا ہوتا ہے اس کا حجم معلوم کرو (رأس پر طما = π)

$$\text{یہاں } \text{ا} \text{ ما در لا} = \text{ا} \text{ (۱ - جم طما) } \text{فرس} = \frac{1}{2} \text{ ا جب طما}$$

۱۹۔ اس چار سطحی کا حجم معلوم کرو جو محدودوں کی سطوح مستویہ اور مستوی

$$\frac{\text{ا}}{\text{ا}} + \frac{\text{ب}}{\text{ب}} + \frac{\text{ج}}{\text{ج}} = ۱ \text{ سے بنتی ہے۔}$$

۲۰۔ لا = ۰ اور لا = ا کے درمیان اس مجسم کا حجم معلوم کرو جسکی مسادات

$$\text{ج} + \frac{\text{ا}}{\text{ا}} \text{ ما} = \text{ج} \text{ ہے۔ اس مجسم کو ہم "مخروط فائہ" کہیں گے۔}$$

۲۱۔ منحنی لا + ما = ا کا محیط دریافت کرو۔

$$\text{اگر لا} = \text{ا جب طما} \text{ب} \text{ما} = \text{ا جب طما} \text{اور فرس} = \frac{1}{3} \text{ ا جب طما جم طما}$$

$$\text{محیط ہے } \text{ا} \text{ (۲ ا جب طما جم طما فرطما} = \frac{1}{6} \text{ ا}$$

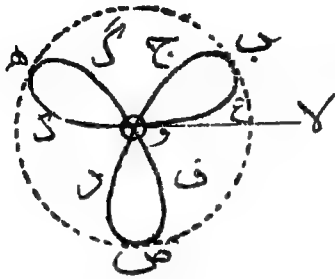
۲۲۔ مخروطی کی قطبی مسادات جبکہ اس کے قطب ہو (۱ + زجم طما) = ل ہے۔

(۱) سکائی (۲) ناقص کی صورت میں وہ رقبہ معلوم کرو جو ابتدائی خط منحنی اور

سمتی قطر طما = $\frac{1}{2}$ کے درمیان گھرا ہوا ہے (عد > π)

۲۳۔ دکھاؤ کہ منحنی ر = ا جب ۳ طما میں مسادی رقبہ کے تین حلقے ہیں

جو سب کے سب نصف قطر $\frac{r}{2}$ کے دائرہ کے اندر واقع ہیں، ایک حلقہ کا رقبہ دریافت کرو۔



شکل ۱۲

جیسے طما صفر سے $\frac{\pi}{3}$ تک بڑھتا ہے
مرسوم نقطہ حلقہ $\frac{\pi}{3}$ سے $\frac{\pi}{2}$ تک بڑھتا ہے
مرسوم کرتا ہے۔

جب طما قیمت $\frac{\pi}{3}$ سے $\frac{\pi}{2}$

تک بڑھتا ہے تو ر منفری ہوتا ہے اور
مرسوم نقطہ حلقہ $\frac{\pi}{2}$ سے $\frac{\pi}{3}$ تک بڑھتا ہے

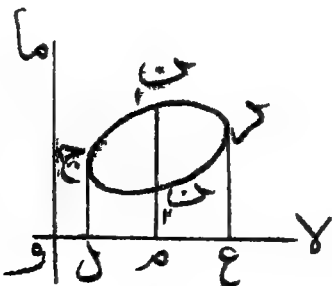
کو مرسوم کرتا ہے، جیسے طما $\frac{\pi}{3}$ سے $\frac{\pi}{2}$ تک بڑھتا ہے مثبت ہوتا ہے اور نقطہ
حلقہ $\frac{\pi}{2}$ سے $\frac{\pi}{3}$ تک کو پیدا کرتا ہے۔ طما کے اس سے زیادہ بڑھنے سے کوئی نئی
توس پیدا نہیں ہوتی۔

۲۴- منحنی $r = \frac{1}{2}$ جب n طما کے تمام حلقوں کے اندر جو رقبہ گھرا ہوا
ہے اُسے معلوم کرو جبکہ (۱) n طاق عدد صحیح ہو (۲) n جفت صحیح ہو۔

۲۵- منحنی $r = \frac{1}{2}$ جب n طما کے ایک حلقہ کا رقبہ معلوم کرو۔

۲۶- منحنی $r = \frac{1}{2}$ جب n طما کے حلقہ کا رقبہ معلوم کرو۔

۱۹- بند منحنی - فرض کرو کہ $\frac{1}{2}$ جب n طما کے ایک منحنی ہے اور
ایک خط مستقیم اسکو دو سے زیادہ نقطوں پر نہیں کاٹتا نیز فرض کرو کہ اس کے سب شعبے
مثبت ہیں۔ فرض کرو کہ $\frac{1}{2}$ جب n طما کے ایک منحنی کے ماس ہیں جو محور MA کے
متوازی ہیں۔ نیز $OL = \frac{1}{2}$



شکل ۱۳

اور $OB = \frac{1}{2}$
جس رقبہ کا منحنی احاطہ کرتا ہے وہ ہے

$\frac{1}{2} \pi r^2$ فرلا۔ $\frac{1}{2} \pi r^2$ فرلا

(۱).....

جہاں $\frac{1}{2}$ اور $\frac{1}{2}$ بالترتیب

ج ج ک اور ج ک ہ ک پر انکی سمتوں میں حرکت کرتے ہیں جیسے
لا، ا سے ب تک بڑھتا ہے۔
تیملے (۱) اس طرح بھی لکھے جاسکتے ہیں

گ م ک فرلا + گ م ک فرلا (۲)

اب فرض کرو کہ اس مخنی پر کے کسی نقطہ کے محدود لا، ما ایک تیسرے متغیر (مثلاً) ت
کے تفاعلوں کے طور پر بیان ہو سکتے ہیں اور یہ متغیر ایسا ہے کہ جیسے ت، ت سے
ت تک بڑھتا ہے، نقطہ (لا، ما) مخنی کے گرد پورا سفر کر جاتا ہے۔ فرض کرو کہ جیسے
ت، ت سے ت تک بڑھتا ہے نقطہ (لا، ما) براستہ قوس ج ج ک، ج ج ک سے ت تک
سفر کرتا ہے اور جب ت، ت سے ت تک بڑھتا ہے تو نقطہ (لا، ما) کس سے ج ج ک راستہ
قوس ج ج ک، ج ج ک سفر کرتا ہے۔ مثلاً ہم ت کو مخنی کی قوس فرض کر سکتے ہیں جسے
ج ج سے ناپنا شروع کیا جاتا ہے، پس اس متغیر فرض کے مطابق
ت = ت، ت = قوس ج ج ک، ت = کل محیط
اگر ت کو مکمل کا متغیر قرار دیا جائے تو (۲) ہو جائیگا

گ م ک فرلا + گ م ک فرلا (۳)

(۳) میں دو سرانگہ منفی ہے کیونکہ م ک، م ک مثبت ہے اور فرلا منفی ہے جیسے
ت، ت سے ت تک بڑھتا ہے۔ جب ت، ت مخنی کی قوس کو تعبیر کرے

تو فرلا اس راویہ کی جیب اتھام ہوتی ہے جو (لا، ما) پر کا ماس محور لا

کے ساتھ بناتا ہے۔ یہ زاویہ ایسے ناپا جاتا ہے جیسے دفعہ ۹۲ حصہ اول میں۔ ہم (۳)
کے دو مکملوں کو ایک تکملہ میں لکھ سکتے ہیں اس طرح بند مخنی کے رقبہ کے لئے جملہ
حاصل ہوتا ہے

۴۱. $\frac{\text{فلا}}{\text{فرت}}$ فرت (۴۱)

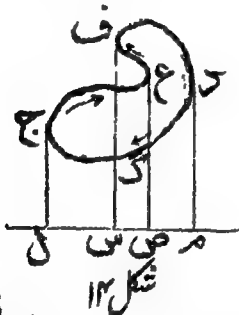
بلور شال سے فرض کرو کہ ج ک یک ک ناقص ہے

$$1 = \frac{(a-k)}{m} + \frac{(b-h)}{n}$$

رکھو لا = ھ۔ عا جم ت، ما = گ + یہا جیت
 جب، ت صفر سے ۲۲ تک بدلتا ہے تو نقطہ (لا، ما) منحنی کے گرد سمت
 جین حرکت میں سفر کرتا ہے، رقیہ

= ک (گ + بہ جبت) = عہ جبت فرت = عہ بہ ک جبت فرت

$$W_1 W_2 \pi =$$



یہ قید کہ خط مستقیم منحنی کو دو سے زیادہ
نقطوں پر نہیں کاٹتا با آسانی ہٹا
دی جاسکتی ہے۔

مثلاً جب نقطہ (لا، ما) منحنی پر تیسروں کی سمت میں حرکت کرتا ہے تو نقطہ کا معین یہ رقبہ عبور کرتا ہے

ل ج ع ص - س ف ع ص + م ف ح م - ل ج گ م

جو میر کا منہ سے گھرے ہوئے رقبہ کے مساوی ہے۔ قوس ع ف ک گ ج پر $\frac{1}{2}$ فریت

منفی ہے، اسلئے متناظر تکیے بھی منفی ہیں، پس رقبوں سے فصائل جگہ گرم کے پہلے منفی علامت لکھی گئی ہے۔

ہم (۱) کو اس طرح بھی لکھ سکتے تھے۔ **کُ مَکُ فِرا۔ کُ مَکُ فِرا**۔

اگر نقطہ (لا، ما) منحنی کے گرد سمت جج کسرت میں محیط پر سے پورا حرکت کر جائے جبکہ ت' سے ت' تک بڑھے تو منحنی کا رقبہ ذیل کے جملہ سے بھی تعبیر ہوگا۔

$$- \text{ لا، ما } \frac{\text{فرق}}{\text{فرق}} \dots \dots \dots (۴)$$

رقبہ جو (۴) یا (۴) سے حاصل ہوتا ہے وہ ایک مثبت عدد ہے۔ لیکن اگر ہم رقبہ

$$\text{کو بھی علامت والی مقدار خیال کریں تو محکمہ لا، ما } \frac{\text{فرق}}{\text{فرق}} \dots \dots \dots (۵)$$

ہر صورت میں منحنی کے رقبہ کا جبرو ناپ ہوگا جبکہ اسے منحنی کے محیط کے گرد اگر دلیا جائے یعنی ت' کے حدود ایسے ہوں کہ نقطہ (لا، ما) ایک دفعہ منحنی کے محیط کے گرد پورا چکر لگا سکے۔ جسے ہم نے اوپر ضابطے (۴) اور (۵) حاصل کئے ہیں بالکل اسی طرح سے ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ مکملہ

$$\text{لا، فرما } \frac{\text{فرق}}{\text{فرق}} \dots \dots \dots (۶)$$

رقبہ کا جبرو ناپ ہے جبکہ اسے منحنی کے پورا اگر دلیا جائے۔
ہم نے اوپر دیکھا ہے کہ جب ت' سے ت' تک بڑھتا ہے تو نقطہ سمت جج کسرت میں منحنی کے گرد حرکت کرتا ہے اگر اس سمت کے لئے مکملہ (۵) مثبت ہے اور (۶) منفی یعنی

$$\text{لا، فرما } \frac{\text{فرق}}{\text{فرق}} = - \text{ لا، فرما } \frac{\text{فرق}}{\text{فرق}}$$

تو جب نقطہ سمت جج کسرت میں حرکت کرے گا تو (۵) منفی ہوگا اور (۶) مثبت۔

نقطہ (لا، ما) کی سمت حرکت بالکل اختیاری ہے۔ ریاضی طبیعیات میں یہ دونوں بن گیا ہے کہ جب ت' کے بڑھنے کے ساتھ مشاہدہ کرنے والا منحنی کے محیط کے گرد اس سمت میں حرکت کرے جس میں کہل رقبہ اس کے بائیں جانب رہتا ہے تو اس طرح رقبہ کے ناپ کے لئے جو عدد حاصل ہوا اسے مثبت قرار دیتے ہیں۔ اگر ہم یہ دستور اختیار

۲۔ رقبہ جو ایک ضلعی کے خط مستقیم اپنی حرکت میں عبور کرتا ہے۔ فرض کرو (ا ب) خط مستقیم ہے جس کا طول ۱۱ ہے اور اس کو نزدیک کے مقام (ا ب) میں ہٹا دیا گیا ہے، اپنی حرکت میں یہ خط رقبہ (ا ب) عبور کرتا ہے۔ یہ رقبہ مثبت ہوگا اگر محیط کے گرو سمت (ا ب) میں جانے سے یہ رقبہ مشاہد کے بائیں جانب رہے اور منفی ہوگا اگر یہ

وائیں جانب رہے۔

سچ کو رجب کے اور

جے سیج کو ورتا کر کے

ستواری کہنچو۔ فرض کر دو کہ

۱۱۔ ایک ثابت خط کے

متوازی ہے اور زاوے

لا اَبْجَاب

بالترتیب عدا اور محبت عدا ہیں۔

صفاریات کے پہلے رتبہ تک رقبہ (احباب) (معنا ہی)

متوازی الاضلاع (آبج) اور مثلث (آجھ) کے مجموعہ کے مساوی ہے۔

اوپ کی حرکت دو حرکتوں سے مرکب ہے۔

(۱) حرکت انتقائیت (سجہ)۔

(۲) گھماؤ کی حرکت کے رد مقامِ آب تک۔

فرض کرو کہ متوازی الاضلاع کا ارتفاع h ہے، صغاریات کے پہلے رتبہ تک

مف کی = ل غ + ۛ ل مف عدا (۱)

$$\text{فرس} = \text{ف} + \text{ا} \text{ دعوہ} \dots\dots\dots (۲)$$

(۲) سے ف = فرس - ا دعوہ، اس کی وجہ سے (۱) ہو جاتا ہے

$$\text{فری} = \text{ل} \text{ فرس} + (\frac{۱}{۲} \text{ ل} - \text{ا} \text{ ل}) \text{ دعوہ} \dots\dots (۳)$$

اگر متغیروں کو ت کے تفاعل فرض کیا جائے جیسا دفعہ ۱۹ میں تو

$$\frac{\text{فری}}{\text{وقت}} = \text{ل} \frac{\text{فرس}}{\text{وقت}} + (\frac{۱}{۲} \text{ ل} - \text{ا} \text{ ل}) \frac{\text{دعوہ}}{\text{وقت}} \dots\dots (۴)$$

مساوات (۴) بالکل عام ہے بشرطیکہ متغیروں کو مناسب علامات دی جائیں۔

فرس، $\frac{\text{فرس}}{\text{وقت}}$ دونوں مثبت ہونگے جبکہ ل کی حرکت ایک ایسے مثلاً

کے بائیں طرف ہو جو احب کی سیدھ میں اسے ب کی طرف دیکھ رہا ہو۔
مثبت تھا و دعوہ، مخالف سمت ساعت ہوگی مستقل مثبت ہوگا جبکہ ل احب
پر واقع ہو یا احب محدودہ پر جبکہ اسے ب میں سے خارج کیا جائے اور منفی ہوگا
جبکہ یہ ب محدودہ پر اسے پرے واقع ہو۔

یہی ت سے ت تک بڑھتا ہے، احب کا رقبہ عبور کردہ

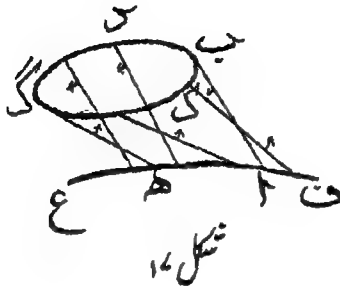
$$\text{فری} = \text{ل} \frac{\text{فرس}}{\text{وقت}} + (\frac{۱}{۲} \text{ ل} - \text{ا} \text{ ل}) \frac{\text{دعوہ}}{\text{وقت}}$$

$$= \text{ل} \text{ س} + (\frac{۱}{۲} \text{ ل} - \text{ا} \text{ ل}) (\text{عہ} - \text{عہ}) \dots\dots\dots (۵)$$

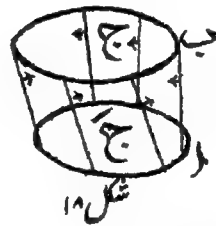
جہاں س اثنائے حرکت میں ل کا کل عمودی ہٹاؤ ہے اور عہ، عہ زاویہ
عہ کی ابتدائی اور آخری قیمتیں ہیں۔ س بالعموم وہی نہیں ہوتا جو ل کے طریق
کا طول ہے۔

اب فرض کرو کہ ب ایک بند منحنی ج مرسم کرتا ہے، اس منحنی کا رقبہ بھی
ج ہے۔

(۱) جب جب بنی جی کا پورا
چکر لگتا ہے تو فرض کرو کہ آتوس
ع ف پر آگے پیچھے حرکت کر کے
اپنے ابتدائی مقام پر آجاتا ہے جبکہ
ب اپنے ابتدائی مقام پر آجائے
پس (۵) میں $عہا = عہا$
اور محض ج کے مساوی
ہے۔ اس طرح



ج = ل س
جہاں س، ج کا کل عمودی ہٹاؤ ہے، کیونکہ میرا تکرار (۵) رقبہ
آب کا گ گ ہ۔ رقبہ آب کا گ گ ہ کو تعبیر کرتا ہے۔ اس
صورت میں س، ا پر منحصر نہیں یعنی آب پر جو ب کا مقام ہے س اس پر
منحصر نہیں ہے۔
(۲) دوسری صورت میں فرض کرو کہ جب آب ج کے محیط کا پورا چکر لگتا ہے
تو (۱) ایک بند بنی ج کے گرد پورا دور کر جاتا ہے۔



اگر ج ج کے باہر ہو (شکل ۱۸) تو $عہا$ اور $عہا$ باہم مساوی ہونگے مساوات
(۵) کا بایاں رکن ل س ہوگا لیکن آب کا عبور شدہ رقبہ ج۔ ج ہوگا
پس ج۔ ج = ل س
لیکن اگر ج ج کا پورا احاطہ کر لے (شکل ۱۹) تو $عہا = عہا$ (۴)

اس لئے ج - ج = ل س + πr (۱ - ل) (۸)
اعداد ج - ج کی علامتیں دفعہ ۱۹ (۷) کے دستور کے موافق حاصل ہوتی ہیں۔

۲۱۔ سطح پیم - بند منحنی کا جیلی طریق پر رقبہ نکلانے کے لئے بہت سے آلات

ایجاد کئے گئے ہیں۔ مذکورہ بالا دو دفعات میں اجمالی طور پر وہ اصول بتائے گئے ہیں جن پر ایسے بہت سے آلات کی بناوٹ مبنی ہوتی ہے۔ سب سے مشہور ایک مسدس قطبی سطح پیم ہے جس کی بناوٹ کا مختصر ذکر یہاں کیا جائے گا۔

قطبی سطح پیم دو سلاخیں ω اور α ج ہوتی ہیں جو α پر آزادانہ طریق سے جڑی ہوئی ہوتی ہیں، سلاخ ω ایک ثابت نقطہ ω کے گرد گھومتی ہے۔ اگر α ایک بند منحنی کو مرسم کرے تو α ایک دائرہ کے محیط پر حرکت کرتا ہے۔ جب α صرف دائرہ کے محیط پر آئے چھپے حرکت کرے اور پورا چکر نہ لگائے تو جس بند منحنی کے محیط پر α گردش کرتا ہے اس کا رقبہ موجب دفعہ ۲۰ (۶) ل س ہوتا ہے۔ اس صورت میں سلاخ α پر جو α کا مقام ہے اس پر پھنسلیں ہوتا۔

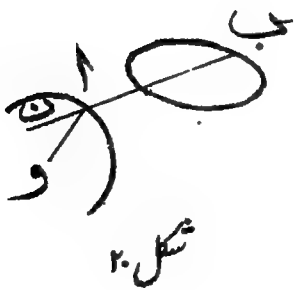
س کو معلوم کرنے کے لئے ایک پیم جس کا محور α کے متوازی ہوتا ہے α کے ساتھ لگا ہوا ہوتا ہے۔ جیسے α منحنی کے محیط پر حرکت کرتا ہے یہ پیم پیم پھسلتا ہے اور کچھ لگتا ہے۔

پھسلنے اور لٹکنے کی حرکتیں باہم بے تعلق ہوتی ہیں یعنی پھسلنے کے وقت پیم محور کے گرد نہیں پھرتا۔

پس α کا عمودی سہاؤ

= پیم کا محیط πr \times ان گردشوں کی تعداد جو بند منحنی کے گرد α کی اٹائے حرکت میں پیم لگاتا ہے۔

یعنی س = πr \times ن



شکل ۲۰

ایک تختی پر ن کی قیمت خود بخود دوج ہوتی جاتی ہے ن صحیح یا کسر ہو سکتا ہے۔
اگر ہم منحنی $\frac{1}{x}$ کو اتنا بڑا فرض کریں کہ $\frac{1}{x}$ نصف قطر والدائرمہ بالکل اس کے اندر
واقع ہو تو بموجب دفعہ ۲۰ (۸)

اشک ۶، سے منحنی $r = 1 + b$ جم طہ کی نوعیت کا پتہ چلتا ہے

جیکہ 1 کے b اور 1 کے b ۔

۸۔ بتاؤ مساوات $f (m, n, a) = 0$ والا منحنی جہاں m, n مستقل ہیں

$f (a, m) = 0$ سے کیسے حاصل ہو سکتا ہے۔ اگر دو سر منحنی بند حلقہ ہو تو پہلا بھی

بند ہوگا اور $f (m, n, a) = 0$ کا رقبہ $f (a, m) = 0$ کے رقبہ کے مساوی

ہوگا جیکہ موخر الذکر کو m, n پر تقسیم کر دیا جائے۔

فرض کرو کہ $m, n, a = 1$ ، اس لئے $1 + b = m, n, a$ اور

اب دفعہ ۱۹ (۷) کو استعمال کرو۔ $1 + b$ کا مکملہ منحنی $f (a, m, n) = 0$ کے

اگر (جو وہی بات ہے کہ $1 + b$ کا مکملہ منحنی $f (a, m, n) = 0$ کے گرو)

مساوی ہوگا $m, n, a = 1$ یعنی $1 + b$ کا مکملہ منحنی $f (a, m, n) = 0$ کے گرو مساوی ہے

اس رقبہ کا $m, n, a = 1$ کا مکملہ منحنی $f (a, m, n) = 0$ سے گھرا ہوا ہے (کیونکہ

$m, n, a = 1$ مستقل ہے اور $1 + b$ کا مکملہ رقبہ ہے)

۹۔ مشق ۶ مثال ۵ پر مثال بالا کا طریقہ استعمال کرنے سے منحنی

$(m, n, a) = 1 + b$ کا رقبہ معلوم کرو۔

۱۰۔ جب a, b (دفعہ ۲۰) ایک گروش پوری کرتا ہے تو $f (a, m, n) = 0$ ایک ایسا

منحنی مرتسم کرتا ہے جس کا رقبہ a, b کی مساوات سے حاصل ہوتا ہے

(۱) $a, b = 1 + b$ کا رقبہ

جہاں $a, b = 1 + b$ اور a, b, c سے وہی مقداریں تعبیر ہوتی

ہوتی ہیں جن کا دفعہ ۲۰ میں ذکر ہوا۔

نیز ثابت کرو کہ اگر a, b ایک بند بیضوی منحنی a, b پر حرکت کریں تو

(۲) $a, b = 1 + b$ کا رقبہ

[ہو لڈج کا مسئلہ]

مساوات (۸) وقفہ ۲ کو استعمال کرو۔ رکھو لی = ا + ب، اس طرح ج۔ ج۔ ج۔
 حاصل ہوگا، پھر رکھو لی = ا، جس سے ج۔ ج۔ ج۔ حاصل ہوتا ہے۔
 اس کو ساقط کرنے سے نتیجہ (۱) حاصل ہوگا۔ (۲) حاصل کرنے کے لئے (۸)
 اور ج۔ ج۔ کے عبور کردہ رقبوں پر غور کرو۔



تکمیلہ مجموعہ کی انتہا خیال کیا جاسکتا ہے

دوسرے ملک

۲۲۔ مکملہ ایک مجموعہ کی انتہا ہے۔ مکملہ کو ایک مجموعہ کی انتہا سمجھنا بعض مسائل میں علم آموز ہونے کے علاوہ ضروری ہوتا ہے، فائدہ (لا) حسب معمول مسلسل خیال کیا جائیگا۔

ابتداء میں فرض کرو کہ Δ اور Φ (لا) ایک مثبت، بڑھنے والا تفاعل ہے، بعد میں ان فیوڈ کو ہٹا دیا جائیگا۔ Δ اور Φ کے درمیان صعودی ترتیب میں

(د-۱) قیمتیں (لا) (لا) (لا) لا مندرج کرد اور

فروق (لا - لا) (لا - لا) (لا - لا) (ب - لا) کو محسوب کرو۔ ان سب فروق کی ایک ہی علامت ہے، اس صورت میں مثبت ہے اور ان کا مجموعہ ب۔ ہے، واضح ہو کہ وقفہ ب۔ کو ن ذیلی وقفوں میں تقسیم کیا گیا ہے اب ہر ذیلی وقفہ کو ف (لا) کی اس قیمت کے ساتھ ضرب دو جو اس وقفہ کی ابتدا میں ہے، اس طرح جو ن حاصل ضرب حاصل ہونگے ان کو جمع کرنے سے

فادو، (لا-د) + فادر (لا-ا) + فادر (لا-یہ) + + فادر (ب-ج)
یا فقروں کی معمولی ترقیم صف و' صف لا'.... کے مطابق

فادر، مفاد + فادرلہ، مفادلہ + فادرلا، مفالہ
مجموعہ (آ) زیادہ برجستہ شکل میں اس طرح لکھا جاسکتا ہے۔

$\sum_{i=1}^n$ فار (۱) مفلا (۲)

ع حس، ع حس، ع حس۔ محور لا کے متوازی ہیں۔
 صیرم حاصل جمع (۱) مستطیلوں ل حس، ل حس، ل حس، ل حس
 کے رقبوں کے مجموعہ کو تعبیر کرتا ہے
 مستطیلوں کا یہ رقبہ، رقبہ ل حس، ع حس کے کم رہتا ہے بقدر ذیل کے کہ وہی مثلثات
 کے مجموعہ کے ع حس، ع حس، ع حس، ع حس۔ حس۔ ط۔
 ع حس کو ل حس کے متوازی کھینچو یہ خط حس کو حس پر کاٹتا ہے۔ ع حس کو
 ف انسک اتنا خارج کرو کہ د ف ذیلی وقفوں ل ل، ل ل، میں سے
 سب سے بڑے کے مساوی ہو۔ مستطیل حرف گ ط کی تکمیل کرو۔
 فرض کرو کہ رقبہ ل حس، ع حس سے تعبیر ہوتا ہے تب ہی اور
 مجموعہ (۱) کا فرق کم ہے ذیل کے ن مستطیلوں کے مجموعہ سے

ع حس × حس، ع حس × حس، ع حس × حس۔ حس × حس۔ ط
 یعنی کم ہے مستطیل حرف (حس، ع حس، ع حس، + حس، ط) سے
 یعنی کم ہے حرف × حس ط سے

یعنی کم ہے حرف { ف (ا ب)۔ ف (ا د) } سے۔
 اگر ن لا انتہا پڑھے اور اسی آن میں ہر ذیلی وقفہ لا انتہا کم ہو تو انتہا میں حرف
 صفر ہوگا اور (۱) کی انتہا ہی ہوگی۔ اس لئے

نہا $\frac{لا}{لا} = ۱$ ف (لا) مفا = می = رقبہ ل حس ط ع (۳)
 البتہ ہم کہہ سکتے ہیں $\frac{لا}{لا} = ۱$ ف (لا) مفا = می تقریباً

اور مسئلہ مذکورہ کے شرائط عائد ہوتے ہیں کیونکہ فار (لا) مسلسل ہے اور ن۔

کے لئے $\frac{1}{x}$ ، $\frac{1}{x^2}$ ، میں سے ہر ایک کی انتہا ایک ہے۔

یہ ثابت کرنے کے بعد کہ (۱) کی انتہا رتبہ ہی ہے ہم حسب دفعہ ۸۸ حصہ اول ثابت کر سکتے ہیں کہ اس انتہا کا مشتق بلحاظ ب کے صراط ہے یعنی فاد ب۔
تکملوں کے متعلق جملہ مسائل مجموعہ (۱) کی انتہا پر استعمال کئے جاسکتے ہیں۔ اب
تکملوں کی عام ترتیم کی وجہ ظاہر ہے کہ لفظ ”مجموعہ“ کا ابتدائی حرف میم ہے اگر
یہ یاد رہے کہ کلمہ مجموعہ نہیں ہے لیکن مجموعہ کی انتہا ہے۔ (دیکھو دفعہ ۲۳ مثال ۲)

یعنی $F(لا+مف لا) - F(لا) = F(لا)مف لا + عید مف لا$

(۱).....

جہاں $عید$ ، $مف لا$ کے ساتھ معدوم ہو جاتا ہے۔

(۱) میں کے $لا$ اور $مف لا$ کو بالترتیب دفعہ ۲۲ کی قیمتیں دو۔ $لا$ کی تمام قیمتوں کے لئے بالعموم $عید$ کی وہی قیمت نہیں ہوگی اس لئے ہم لاحقے استعمال کرتے ہیں پس

$F(لا) - F(لا) = F(لا)مف لا + عید مف لا$

$F(لا) - F(لا) = F(لا)مف لا + عید مف لا$

$F(لا) - F(لا) = F(لا)مف لا + عید مف لا$

$F(ب) - F(لا) = F(لا)مف لا + عید مف لا$

جمع کرنے سے $F(ب) - F(لا) = F(لا)مف لا + عید مف لا$

جہاں $عید$ ، $مف لا$ ، $عید مف لا$ ، + $عید مف لا$

فرض کرو کہ مقدار $عید$ ، $عید$ ، ہیں سے $عید$ تعداد سب سے بڑا ہے تب عددی قیمت کے لحاظ سے

$عید (مف لا + مف لا + مف لا + + مف لا) یا عید (ب)$

چونکہ ہر $عید$ اور اس لئے ہر $عید$ کی انتہا صفر ہے اس لئے $عید$ کی انتہا بھی صفر ہوگی پس نتیجہ ثابت ہوتا ہے۔

مثال ۳۔ $n \rightarrow \infty$ کے لئے

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2n}$$

کی انتہا معلوم کرو۔

ہم اس مجموعہ کو اس طرح لکھ سکتے ہیں

$$\frac{1}{n} \times \frac{1}{\frac{1}{n}+1} + \dots + \frac{1}{n} \times \frac{1}{\frac{1}{n}+1} + \frac{1}{n} \times \frac{1}{\frac{1}{n}+1} + \frac{1}{n} \times \frac{1}{\frac{1}{n}+1}$$

$$\text{یا اس طرح سے } \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \times \frac{1}{\frac{1}{n}+1}$$

تفاعل فار (لا) = $\frac{1}{n}$ پر غور کرو۔ دفعہ ۲۲ میں فرض کرو کہ ہر فرق $\frac{1}{n}$ ہے۔
فرض کرو کہ ۱ = 'ب' = ۲ اوپر کا مجموعہ اُسی طرح کا سلسلہ ہوگا جیسا (۱) دفعہ
۲۲ ہے اگر ہم فار (لا) کی قیمتیں ہر وقفہ کے آخر کی فرض کریں۔

$$\text{پس مطلوبہ انتہا ہے } \int \frac{1}{n} = [\text{لوک لا}] = \text{لوک } ۲ = ۰.۶۹۳$$

۲۴۔ تقریبات۔ تکملہ کی قیمت معلوم کرنے میں بالعموم پہلے وہ تفاعل معلوم کیا جاتا ہے جس کا مشتق معلومہ شکل ہو۔ اب اگر یہ تفاعل معلوم نہ ہو سکے تو یہ طریقہ ناکام رہے گا۔ ایک مشہور صورت جس میں یہ طریقہ استعمال نہیں ہو سکتا طبعی مثالوں میں پیدا ہوتی ہے جہاں شکل کے لئے تجزیاتی جملہ معلوم ہونے کی بجائے اس کا گراف معلوم ہوتا ہے اس لئے جب مشکل کی قیمتوں کی صرف محدود تعداد معلوم ہو تو اس صورت میں بھی تکملہ کی تقریبی قیمت معلوم کرنے کے طریقے ایجاد کئے گئے ہیں یہ تسلیم کر لیا گیا ہے کہ مشکل کو ایک مسلسل تفاعل متصور کیا جاسکتا ہے اگرچہ اس کی قیمتوں کی صرف محدود تعداد معلوم ہونے کی وجہ سے تفاعل کے لئے تجزیاتی جملہ معلوم نہیں ہو سکتا۔ جو طریقہ اب بیان کرے جائیگے وہ تجزیاتی شکل کے تفاعلوں کے لئے بھی استعمال ہو سکتے ہیں اگرچہ ایسی صورت میں زیادہ قوی طریقہ میسر آسکتے ہیں بالخصوص سلسلوں میں پھیلانے کا طریقہ۔

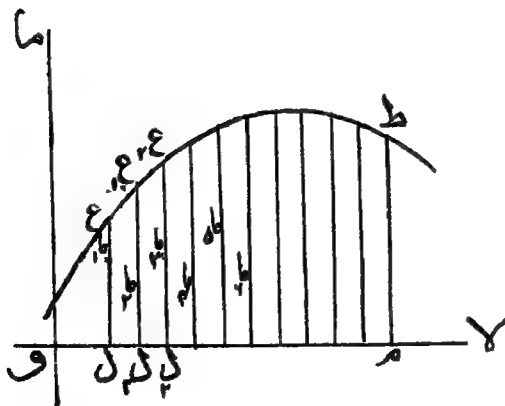
فرض کرو کہ لی مر کو ن مساوی حصوں میں تقسیم کیا گیا ہے اور ہر حصہ h کے مساوی ہے۔ نیز فرض کرو لی مر اور باقی (ن-۱) نقاط تقسیم پر کے معین $ما_۱, ما_۲, ما_۳, \dots$ معلوم ہیں۔

تکملہ $ف_۱(لا) فرلا \dots (۱)$

کے صوب کرنے سے یہی مراد ہے کہ رقبہ لی مر ط ع معلوم کیا جا سکے [شکل ۲۳] ترسیم کی بجائے فرض کرو کہ کثیر الاضلاع ع ع ع ع ہے پہلے منحرف کا رقبہ $\frac{1}{2} h (ما_۱ + ما_۲)$ ہے اور یہ رقبہ لی مر ط ع کے متناظر ٹکڑے کے رقبہ سے بہت تھوڑا کم ہو گا۔ ان سب منحرفوں کو جمع کرنے سے اس رقبہ لی مر ط ع کی اور اسلئے تکملہ (۱) کی تقریبی قیمت معلوم ہوتی ہے

$$ق = \frac{1}{2} h (ما_۱ + ما_۲) + \frac{1}{2} h (ما_۲ + ما_۳) + \dots + \frac{1}{2} h (ما_۴ + ما_۵) \dots (۲)$$

$$= \frac{1}{2} h \{ ما_۱ + ۲ ما_۲ + ۲ ما_۳ + \dots + ما_۴ \} \dots (۲)$$



شکل ۲۳

اگر ترسیم اے طول میں
سرا سر اوپر کی طرف
محدب ہو جائے شکل
۲۳ میں توقع اصلی
رقبہ سے کم رہے گا
اور اگر منحنی اوپر کی طرف
منقعر ہو تو توقع رقبہ
سے بڑھ جائے گا۔
جفت معینوں
 $ما_۱, ما_۲, \dots$ کے

(۳) جفت معینوں کے مجموعہ کا چار گنا معلوم کرو۔
ان تین مجموعوں کو جمع کرو اور اس حاصل جمع کو معینوں کے مشترک فاصلہ کے ایک تہائی سے ضرب دو۔

$$\text{فرض کرو کہ } ۱۰۱ + ۱۰۲ + ۱۰۳ + \dots + ۱۰۴ = ۱۰۵$$

$$۱۰۱ + ۱۰۲ + ۱۰۳ + \dots + ۱۰۴ = ۱۰۵$$

$$۱۰۱ + ۱۰۲ + ۱۰۳ + \dots + ۱۰۴ = ۱۰۵$$

تب ہ، ع، و، ر کی رقوم میں

$$ق_۱ = \frac{۱}{۱۰۵} (۱۰۱ + ۱۰۲ + ۱۰۳ + \dots + ۱۰۴) = ۱۰۵$$

$$ق_۲ = \frac{۱}{۱۰۵} (۱۰۱ + ۱۰۲ + ۱۰۳ + \dots + ۱۰۴)$$

$$\text{اس لئے } ق_۱ = \frac{۱}{۱۰۵} + ق_۲ = \frac{۱}{۱۰۵} \dots (۸)$$

فرض کرو کہ ترسیم اوپر کی طرف محذب ہے اور معین مثبت ہیں یعنی

$$ق_۱ > رقبۃ ل مطع > ق_۲$$

$$\text{تب } ق_۱ - ق_۲ = \frac{۱}{۱۰۵} (ق_۱ - ق_۲)$$

$$ق_۱ - ق_۲ = \frac{۱}{۱۰۵} (ق_۱ - ق_۲)$$

اس لئے سمن کے کلیہ میں غلطی یا خطا $\frac{۱}{۱۰۵} (ق_۱ - ق_۲)$ یا $\frac{۱}{۱۰۵} (۱۰۱ - ۱۰۲)$

(۹).....

سے کم ہے۔

ضابطہ (۸) سے ظاہر ہوتا ہے کہ سمن کے کلیہ میں بیرونی کثیر الاضلاع کی نسبت اندرونی کثیر الاضلاع کو زیادہ اہمیت دی گئی ہے۔

تقرب کے مندرجہ بالا طریقہ ایک محدود کملہ کی صورت میں بھی استعمال ہو سکتے ہیں خواہ فار (لا) کو نخی کا معین تصور کیا جائے یا نہ کیا جائے مثلاً قطبی محدودوں میں

۹۔ ثابت کرو کہ جب n مال بہ ∞ ہو تو $\frac{n}{n+1}$ کی انتہا $\frac{\pi}{4}$ ہے۔

۲۵۔ اوسط قیمتیں۔ n مقدار $h_1, h_2, h_3, \dots, h_n$ کا اوسط حسابی

$\frac{h_1 + h_2 + \dots + h_n}{n}$ ہے۔ فرض کرو کہ n کی قیمتوں $h_1, h_2, h_3, \dots, h_n$

..... ب۔ h کے جواب میں $f(x)$ کی قیمتیں $h_1, h_2, h_3, \dots, h_n$ ملی ہیں

جہاں وقفہ ب۔ h کو طول h کے n مساوی حصوں میں تقسیم کیا گیا ہے۔ $h_1, h_2, h_3, \dots, h_n$ کے اوسط حسابی کی انتہا جبکہ $n \rightarrow \infty$ تفاعل $f(x)$ کی اوسط قیمت کہلاتی ہے

سعت پ۔ h میں۔

اوسط قیمت کو بطور نمونہ کے بیان کر سکتے ہیں کیونکہ

$$\left(\frac{h_1 + h_2 + \dots + h_n}{n} \right) = \left(\frac{h_1 + h_2 + \dots + h_n}{n} \right) \dots (1)$$

اور بائیں جانب کی کسر کا شمار کنندہ

$f(x) = h_1 + h_2 + \dots + h_n$ اور اس لئے $h \rightarrow 0$ کے لئے ہے

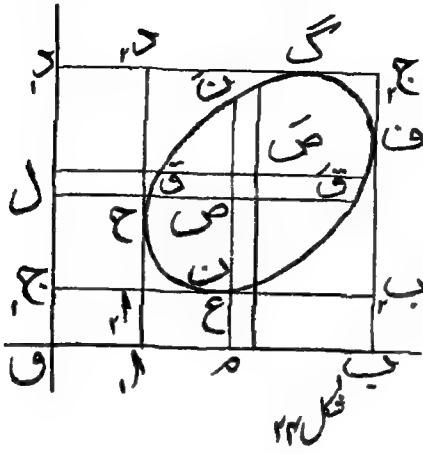
مگر $f(x)$ فرلا۔ پس اوسط قیمت ہے

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \dots (2)$$

مثال ۱۔ نیم قطر کے نصف دائرہ کے معین کی اوسط قیمت ہے

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin x dx = \frac{2}{\pi} = 0.636957 \dots$$

اس صورت میں قطر کون مساوی حصوں میں تقسیم کیا گیا ہے۔ لیکن اگر نصف محیط کون مساوی حصوں میں تقسیم کیا جائے اور تفاعل کا متغیر متبوع قوس $\sin x$ ہو جہاں طما قطر کے ایک سرے سے اس نقطہ تک ناپا گیا ہے جہاں سے معین



نقطوں پر نہیں کاٹا۔
اگر کوئی منحنی اس شرط کو
پورا نہ کرے تو اسے
ایسے جزوی رقبوں
میں تقسیم کیا جاسکتا
ہے جن میں سے ہر ایک
اس شرط کو پورا کرے۔
فرض کرو کہ (اب)

کوم اور ج کے درمیان تقسیم کیا گیا ہے اور نقاط تقسیم میں سے محوروں کے متوازی خط
کھینچے گئے ہیں۔ رقبہ ع ف گ ح اس طرح اچھوٹے چھوٹے مستطیلوں میں تقسیم
ہو جائیگا اگرچہ ع ف گ ح کے محیط کے نزدیک ان مستطیلوں کے ایسے نقاط
ہوں گے جو منحنی کے باہر واقع ہوں گے۔

فرض کرو کہ (اب) کے دو متصل نقاط تقسیم کے فصلے (لا، لا) + مف (لا، لا) ہیں
اور ج کے دو متصل نقاط تقسیم کے معین (فل، فل) + مف (فل، فل) اور
نقاط ص، ص کے عدد (لا، لا) (فل، فل) (لا، لا) + مف (لا، لا) (فل، فل) + مف (فل، فل)

ہیں۔
مستطیل ص ص کے رقبہ مف لا مف فل کو ف (لا، لا) (فل، فل) کے
ساتھ ضرب دو جو ف (لا، لا) (فل، فل) کی قیمت ص پر ہے، اس طرح سے حاصل جمع

ح ف (لا، لا) (فل، فل) مف لا مف فل (۱)

ع ف گ ح کے محیط اور اندر کے سب نقاط کے لئے مرتب کرد۔

[ہندسی نقطہ نظر سے ی = ف (لا، لا) ایک سطح کو تعبیر کرتی ہے۔

حاصل جمع (۱) کے نمونہ کی رقم ف (لا، لا) (فل، فل) مف لا مف فل اس

متوازی السطوح کا حجم ہے جس کا قاعدہ مستطیل صف (لا، مل) صف مل ہے اور
ارتفاع اس نقطہ کا می، محدود (لا، مل) مل ہے جہاں نقطہ ص پر چھوٹے
مستطیل پر کا عا د سطح سے ملتا ہے۔ پس مجموعہ (۱) اس مجسم کے حجم کو تقریباً یقیناً
ہے جو گھرا ہوا ہے سطح می = ف (لا، ما) سے، سطح مستوی لا و ما سے
اور اس اسطوانہ سے جو ایک خط مستقیم محیط ع ف گ ح کے گرد حرکت کرنے
سے پیدا کرتا ہے جبکہ یہ خط اثناء حرکت میں ہمیشہ سطح لا و ما پر عمود رہے
[مقابلہ کرو اشکال ۴۸، ۴۹ حصہ اول کے ساتھ]

ہم (۱) کی انتہا معلوم کرنا چاہتے ہیں جبکہ م اور ن میں سے ہر ایک لا انتہا بڑھے
اور ساتھ ہی ہر جزو صف لا، صف مل اور اس لئے ہر رقبہ صف لا، صف مل
لا انتہا گئے۔ چونکہ (۱) میں دو طرح کے اضافے ہیں ہم (۱) کو جائز طور پر دوہرے مجموعہ سے
تیسرے کر سکتے ہیں

33 ف (لا، مل) صف لا، صف مل (۲)

جہاں ایک 3 صف مل سے متعلق ہے اور دوسرا صف لا سے۔

پہلے لا اور صف لا کو مستقل رکھو یعنی ن ← ∞ کے لئے انتہا معلوم کرو

33 ف (لا، مل) صف مل

جو ایک متغیر (یعنی ما) کے مکملہ کی تعریف کے مطابق = م^م ف (لا، ما) فرما
م^م

(۳)

مکملہ (۳) میں لا، م^م م^م واقع ہونگے لیکن م^م اور م^م
دونوں منحنی ع ف گ ح کی مسادات کی وجہ سے و م^م یعنی لا کے
تفاعل ہیں۔ اس لئے (۳) لا کا تفاعل ہے اور ف (لا) سے تیسرے ہو سکتا ہے۔
[ہندی نقطہ نظر سے ف (لا) مذکورہ بالا مجسم کی اس تراش کے منحنی کا رقبہ ہے

جوں ن میں سے گزرنیوالی مستوی سطح جو لا و صا پر عمود وار ہے مجسم سے کاٹی ہے اور اگر صفاریات کے صرف پہلے رتبہ کو ملحوظ رکھا جائے تو فنا (لا) صف لا مجسم کے ایک ٹکڑے کا حجم ہے جس کی موٹائی صف لا ہے [اس کے بعد م ← ∞ کے لئے انتہا معلوم کرو۔

نہا ح صف لا فنا (لا) = ک ف (لا) فر لا (۴)

پس (۱) کی انتہا تکملہ (۴) کے ذریعہ بیان ہو سکتی ہے اور یہ انتہا مذکورہ بالا مجسم کا حجم ہے چونکہ فنا (لا) خود ایک تکملہ ہے اس لئے جملہ (۴) دوہرہ تکملہ ہے اور یہ دوہرہ تکملہ اس علامت سے تعبیر ہو سکتا ہے

ک ف (لا) ف (لا) فر لا (۵)

(۴) کے طرز ثبوت سے ظاہر ہے کہ (۵) جو محض ضابطہ (۴) کی علامتی ترقیم ہے الفاظ میں اس طرح بیان ہو سکتا ہے۔ ف (لا) ف (لا) کو لمحاظ ما کے ما = مین سے ما = مین تک مکمل کرو اور اس عمل تکمیل میں لا کو مستقل قرار دو پھر حاصل کو لمحاظ لا کے لا = و لا = و جب تک مکمل کرو۔ ہم پہلے م کو پھر ن کو لا انتہا بنانے سے (۱) کی انتہا معلوم کر سکتے ہیں اس صورت میں نتیجہ اس طرح بیان ہو گا

ک ف (لا) ف (لا) فر لا (۶)

(۶) میں عمل تکمیل پہلے لمحاظ لا کے کیا جاتا ہے اور اس عمل میں ما کو مستقل رکھا جاتا ہے پھر حاصل کو لمحاظ ما کے مکمل کیا جاتا ہے۔ صیر کا دوہرے تکملے (۵) اور (۶) باہم مساوی ہیں کیونکہ وہ ایک ہی حجم کو تعبیر کرتے ہیں۔

جب رقبہ زیر بحث مستقل (ج) کے ساتھ ہو تو (۵) میں ما کے حدود مستقل ہونگے
یعنی و ج و ج و ج بالترتیب اور (۶) میں لا کے حدود لی ق لی ق
بھی مستقل ہوں گے یعنی و لا و لا و لا بالترتیب۔ اس لئے
و لا و لا و لا و ج و ج و ج کی بجائے بالترتیب
و لا و لا و لا لکھنے سے

ک فر لا ک فر لا (ما) فرما = ک فر ما ک فر لا (ما) فرلا... (۷)
یعنی جب سب حدود مستقل ہوں تو ما اور لا کے حدود وہی ہونگے خواہ تکمل کے
اعمال کو کسی ترتیب میں لیا جائے۔ جب حدود سب مستقل نہ ہوں تو (۵) میں ما کے
(لا کے) حدود وہی نہیں ہونگے جو سادہ تکملہ (۶) میں ما کے (لا کے) حدود ہیں
دوہرے تکملہ کی ہندسی تعبیر نہایت کارآمد ثابت ہوتی ہے، لیکن اس کے مفہوم کی
توضیح اور طرح سے بھی ہو سکتی ہے، مثلاً ف (لا) ما کو رقبہ ع ف گ ج
پر مادہ کی تغیر سطحی کثافت خیال کیا جاسکتا ہے، اس صورت میں تکملہ سے کل کثافت
مادہ حاصل ہوگی۔

۲۷۔ دوہرے تکملوں کی ترتیم۔ قطبی اجزاء۔ ضابطہ (۵) اور (۶)
کی شکل سے ٹھیک طور پر واضح ہوتا ہے کہ تکملے کس ترتیب سے لئے جانے چاہئیں، لیکن
اور ترمیمیں بھی استعمال ہو سکتی ہیں جو اگرچہ ایسی صریح اور میں نہیں تاہم آسان اور
سہولت دہ ضرور ہیں مثلاً یہ صورت

ک فر لا ک فر لا (ما) فرلا فرما... (۸)
کچھ ایسے اضافہ کے ساتھ کہ ”عمل تکمل کو کل رقبہ ع ف گ ج پر وسعت دیجئے“

(۵) یا (۶) کے معامل کے طور پر استعمال ہو سکتی ہے۔

(۵) کی بجائے ذیل کی علامت اکثر استعمال کی جائے گی

ح ف (لا، ما) فلا فرما

جس کے متعلق اس دستور کو ملحوظ رکھا جائیگا کہ پہلا تکمیل بلحاظ اس متغیر کے ہوگا جو سب سے بائیں جانب ہے یعنی ما اور اس کے حدود اس علامت پر موقوف ہونگے جو عین شکل کے پاس ہے یعنی ہفت 'م'۔ علاوہ اس کے ہم فرض کر سکتے ہیں کہ رقبہ ح ف بھی حج ایسے جزوی تقیوں میں تقسیم کیا گیا ہے جو مستطیل نہیں ہیں۔ اگر توبہ کا ایسا جزوی رقبہ م'ف میں ہو۔ اگر م'ف میں کسی اندیسا کے محیط پر کسی نقطہ کے محدود (لا، ما) ہوں تو (ا) کے جواب میں مجموعہ

ح ف (لا، ما) م'ف س (۱)

مرتب ہوگا۔ ہندی نقطہ نظر سے اگر دیکھا جائے تو (ا) سے دفعہ گذشتہ کے مجسم کا ترقیمی حجم حاصل ہوگا۔ رقبوں م'ف س کی تعداد کے لا انتہا بڑھانے اور اسکی بنا پر ہر رقبہ م'ف س کے لا انتہا گھٹانے سے جو انتہا حاصل ہوگی دو مجسم مذکور کا حجم آدھا ہوگا اس لئے کہ اس طرح تقسیم کیا جائیگا

ح ف (لا، ما) م'ف س (۲)

جہاں جس تکمیل کو کل رقبہ ح ف گ حج پر توسیع دی گئی ہے۔
سلسلہ دفعہ ۸ حصہ اول کی روشنی میں دیکھنا آسان ہے کہ جہاں تک مجموعہ (۱) کی انتہا (۲) کا تعلق ہے (لا، ما) م'ف س کے اندر یا محیط پر کوئی نقطہ ہو سکتا ہے اس بات کا یاد رکھنا نہایت ضروری ہے کیونکہ اس میں جو اصول بنیاد ہیں وہ اکثر استعمال کیا جاتا ہے (مثال کے طور پر دیکھو دفعہ ۲۸ کی مثال ۳) فرض کرو م'ف س کا تقیوں اس طرح ہوتا ہے۔ دو متحد مرکز دائرے جو جن کے نصف قطر r اور R + r م'ف r ہوں، ان کے دو نصف قطر کو جوابدہائی خط کے ساتھ دائرے r اور R + r م'ف r بنائیں۔ جو دائروں کی قوسوں

مکمل سے حجم کی کل قیمت حاصل ہوگی۔

مثال ۱۔ اس چار سطحی کا حجم معلوم کرو جو محدودوں کی سطوح مستویہ اور سطح

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = 1 \text{ سے گھری ہوئی ہے، 'ا' ب' ج' تینوں مثبت ہیں۔}$$

منفی ع ف گ ج اس صورت میں مثلث و ط ط ہے ط ط کی مساوات ہے

$$\text{ما} = \text{ب} (1 - \frac{1}{4})$$

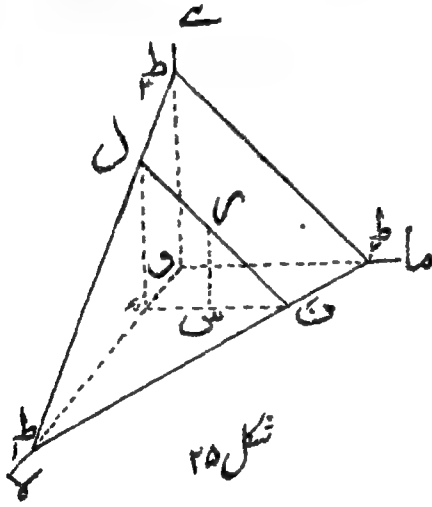
$$\text{اور م ج} = \text{ب} (1 - \frac{1}{4})$$

اور دفعہ ۱ کا م ر ن اس جگہ منفی۔

$$\text{م ر ن} = \text{ف} (1 - \frac{1}{4}) = \text{ج}$$

$$\text{ج} = (1 - \frac{1}{4}) - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

اس لئے (۵) کو استعمال کرنے سے
جہ حاصل ہوگا



$$\text{کفر لا} \text{ کفر لا} \text{ کفر لا} = \text{ج} \text{ کفر لا} [(1 - \frac{1}{4}) - \frac{1}{2}] = \frac{1}{4} \text{ کفر لا}$$

$$= \frac{1}{4} \text{ ب ج} \text{ کفر لا} (1 - \frac{1}{4}) = \frac{1}{4} \text{ ب ج}$$

میرے $\frac{1}{4} \text{ ب ج} (1 - \frac{1}{4})$ مثلث ل م ر کا رقبہ ہے۔

مثال ۲۔ یکسر لا فرح کی قیمت معلوم کرو جبکہ اسے ناقص نما

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = 1 \text{ کے تمام حجم میں سے لیا جائے۔}$$

$$\text{کفر لا فرح} = \text{کفر لا} \text{ کفر لا} \text{ کفر لا} = \text{کفر لا} [(1 - \frac{1}{4}) - \frac{1}{2}]$$

کیونکہ لمحاظاً اور ہی کے تکمل کرنے میں لا مستقل ہے اور کی فرما فرمی اس
تراش کا رقبہ ہے جو محور کا پر عمود وار ہے۔ اب لمحاظ لا کے تکمل کر دیا تب
۲۲ $\frac{1}{2}$ ج حاصل ہوتا ہے۔ تفاعل لا کی اوسط قیمت ناقص نما کے تمام حجم میں
۱۵

اوپر کی قیمت ۲۲ $\frac{1}{2}$ ج کو حجم پر تقسیم کرنے سے حاصل ہوتی ہے یعنی $\frac{1}{5}$ ۔
بالعموم تفاعل ف (لا) کی اوسط قیمت رقبہ ع ف گ ح (شکل ۲۳)
پر تکملہ (۱۵) یا (۱۶) کو کل رقبہ پر تقسیم کرنے سے حاصل ہوگی اور اسی طرح کی تعریف کل
حجم میں کی اوسط قیمت کے لئے صادق آئے گی۔ اگر اس مثال میں لا تکملہ (لا) کا
پر ناقص نما کی قیمت مادہ کی کثافت ہو تو $\frac{1}{5}$ اس قیمت مادہ کی اوسط کثافت ہوگی۔
مثال ۳۔ ف (لا) صرف لا کا تفاعل ہے اور سما (ما) صرف ما کا اور
ف (لا) ما ان دو تفاعلوں کا حاصل ضرب ہے دفعہ ۲۶ سے یہ لازم آتا ہے کہ
حاصل ضرب ف (لا) سما (ما) کا تکملہ جبکہ سے مستطیل $\frac{1}{5}$ جسم ج (د)
(شکل ۲۴) پر لیا جائے ذیل کے تکملوں کے حاصل ضرب کے مساوی ہوگا

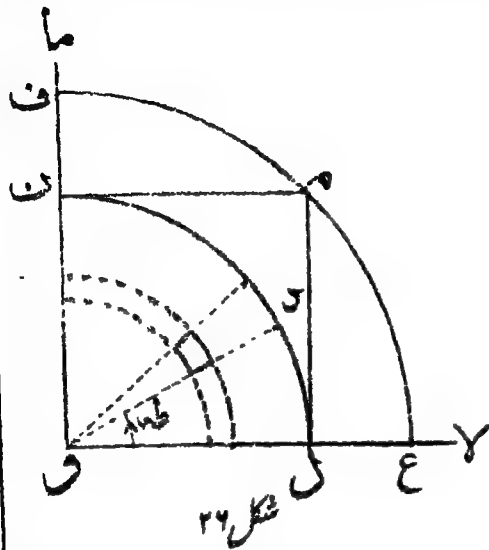
ک ف (لا) ف (لا) اور ک سما (ما) سما (ما) فرما

اب فرض کر دو کہ ف (لا) = قولا اور سما (ما) = قوما

اور ۷ = ک قولا ف (لا) = ک قوما فرما (۱)

ظاہر ہے کہ ان دو تکملوں کا حاصل ضرب ع مساوی ہے ذیل کے تکملہ کے جبکہ اسے
مرتب فی مرتبہ پر لیا جائے (شکل ۲۶) جس کا ضلع و ل = ۱

ک قوما + قوما فرما (۲)



و کو مرکز مان کر دو دائروں
کی قوسیں کھینچو ایک دائرہ کا
نصف قطر $ق = لا$ ہو
اور دوسرے کا $ق = ما$ ہو
تکملہ (۲۶) پر ہے اس تفاعل
کے تکملہ سے جبکہ اسے رقبہ
و کی حسن پر لیا جائے
اور چھوٹے اس تفاعل کے
تکملہ سے جبکہ اسے رقبہ
و کی حسن پر لیا جائے
یہ دو تکملے قطبی متحدوں میں

تبدیل کرنے سے باسانی حاصل ہو سکتے ہیں، فرلا فرما کی بجائے رفر فرط ہوگا
اور نو - (لا + ما) کی بجائے نو اور (۲) ہو جائیگا رقبہ و کی حسن کے لئے

$$لا قو رفر فرط = لا قو رفر لا فرط = \frac{\pi}{4} (لا - قو) \text{ کیونکہ}$$

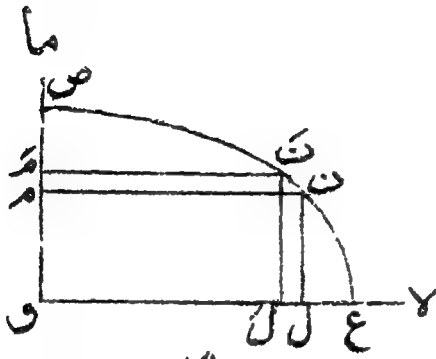
$$قو ر کا تکملہ - \frac{1}{4} قو ہے$$

یہ تکملہ و رقبہ و ع و ف پر محسوب کیا جائے تو تکملہ کی قیمت $\frac{\pi}{4} (لا - قو)$ ہوگی۔
ع و ان دو قیمتوں کے درمیان واقع ہوتا ہے، لیکن جب لا مال بہ لائے
ہو تو دونوں قیمتیں مال بہ $\frac{\pi}{4}$ ہوتی ہیں اور اس صورت میں ع و مال بہ $\frac{\pi}{4}$ اور
ع و مال بہ $\frac{1}{4} \pi$ ہوتا ہے۔ پس

$$لا قو لا فرلا = لا قو لا فرلا = \frac{\pi}{4} \frac{1}{4}$$

یہ مثال ایک شہو تکملہ کی خاص صورت ہے (دیکھو مشق ۶، مثال ۲) اور

مثال ۲۔ یکساں کثافت کا مستوی تیل جس کی شکل ناقص کے راج و عت صی کی ہے (شکل ۲۸) دوسرے سطحی کو استعمال کرنے کے بغیر ایسے سوال حل ہو سکتے ہیں۔



و ع کے متوازی ایک
تیل کا مٹا مٹا مٹا
لو جس کا عرض فرما ہو
اسکو کیت کا ایک جزو مانو
اس ٹکڑے کا مرکز جمود اس
نقطہ تنصیف پر ہے اور
و ص کے گرد اس کا
سیار اثر

$\frac{1}{p}$ لا x کما لا فرما یعنی $\frac{1}{p}$ کما لا فرما ہے۔

کل کیت π کما $\frac{ab}{p}$ ہے۔

اس لئے $\frac{\pi}{p}$ کما $\frac{ab}{p}$ لا = $\frac{1}{p}$ کما $\frac{1}{p}$ لا فرما = $\frac{1}{p}$ کما $\frac{1}{p}$ (ب۔ ما) فرما
= $\frac{1}{p}$ کما $\frac{ab}{p}$

اس لئے لا = $\frac{ab}{\pi p}$

اسی طرح سے ما = $\frac{ab}{\pi p}$ مائل ہوگا اگر ٹکڑے $ل$ $ن$ $و$ کیت

کا ابتدائی جزو مانا جائے۔
اگر کثافت یکساں نہ ہو تو اوپر کا طریقہ بالعموم کارگر نہیں ہوتا۔
فرض کرو کہ کما = s لا ما (س مستقل)

کل کیت دت = کل لا مافزلا فرما = س کل لا فرلا مافزلا

$\frac{1}{2}$ س کل لا مافزلا

اور چونکہ و مڈ = مآ = بآ (۱- $\frac{1}{2}$) ہمیں باسانی حاصل ہوتا ہے

دت = $\frac{1}{2}$ س و بآ

نبرت لا = کل لا مافزلا فرما = س کل لا فرلا مافزلا

= $\frac{1}{2}$ س و بآ

اسلے لا = $\frac{1}{2}$ و، اسی طرح سے مآ = $\frac{1}{2}$ ب

مثال ۳۔ یکساں کثافت کا قطع دائرہ۔

مثال (۱) کی ترقیم اختیار کرو۔ چھوٹے قطع و حنق کو کیت کا جزو مانو
و حنق کا مرکز جمود نقطہ ($\frac{1}{2}$ و ط) پر ہے اور جزو کا معیار اثر و مآ کے گرد ہے

$\frac{1}{2}$ و جم ط مآ کا $\frac{1}{2}$ و فرط = $\frac{1}{2}$ کا و جم ط فرط

کل کیت دت = کا و عا ازرو کے تشاکل مآ = $\frac{1}{2}$ پس

دت لا = $\frac{1}{2}$ کا و جم ط فرط = $\frac{1}{2}$ کا و جب عا

پس لا = $\frac{2}{3}$ و جب عا

اگر کثافت یکساں نہ ہو تو بالعموم دوہرے مکمل کی ضرورت ہوگی۔
و حنق کے مرکز جمود کو و حنق پر مانا گیا ہے، یہ بھی بار قیاس کیا ہے کہ

اننتہا یعنی میں ایک ہی بات ہے خواہ نقطہ ($\frac{2}{3}$ و ط) کو یا ($\frac{2}{3}$ و ط) کو

مرکز جمود مانا جائے جہاں $\text{ط} + \text{ط} + \text{ط} + \text{ط}$ کے درمیان کوئی قیمت ہے۔ اس قسم کے اختصار سے اکثر کام پریا جاتا ہے۔ اسی طرح سے مثال (۲) میں اختصاراً یہ مان لیا گیا تھا کہ $\text{ط} + \text{ط} + \text{ط} + \text{ط}$ کا مرکز جمود $\text{ط} + \text{ط}$ کے نقطہ تنصیف پر ہے۔

مثال ۴۔ یکساں قائم مستدیر مخروط۔

اُردو کے تشاکیل مرکز جمود محور پر واقع ہے۔ رأس سے فاصلہ لا پر ایک تراش لوجو محور پر نمودار ہو۔ اگر مخروط کا ارتفاع ف اور قاعدہ کا رقبہ ق ہو تو

اس تراش کا رقبہ لاق ہوگا۔ اس تراش اور رأس سے فاصلہ لا + صف لا

پر جو متوازی تراش ہے ان کے درمیان کی قاش کو کیت کا جزو قرار دو۔ کل کیت $\text{ت} = \text{پ} + \text{ق} + \text{ق}$

اور $\text{ت} = \text{لا} = \text{ک} \times \text{لاق}$ $\text{لاق} = \text{ق} \times \text{فر} = \text{پ} + \text{ک} \times \text{ق}$

اور $\text{لا} = \text{پ} + \text{ق}$

اگر کثافت یکساں نہ ہو تو دوہرے یا تہرے تک ملی استعمال کرنے کی ضرورت ہوگی کیونکہ کیت کا جزو حسب بالا منتخب نہیں کیا جاسکتا، لیکن اگر کثافت صرف لا کا فاصلہ ہو تو ہی طریقہ صادق آئے گا مثلاً اگر $\text{ک} = \text{د}$ (د مستقل) تو طالب علم ثابت کر سکتا ہے کہ

$\text{ت} = \text{ق} + \text{ک} \times \text{لاق} = \text{پ} + \text{ق} \times \text{فر} = \text{ق} \times \text{لا} = \text{ق} \times \text{پ} + \text{ق} \times \text{ق}$

۲۹۔ جمود کا معیار اثر۔ فرض کرو کہ ن ذرات ہیں جنکی کیتیں بالترتیب

$\text{م}، \text{م}، \dots، \text{م}$ ہیں اور ایک ثابت محور و سے ان کے فاصلے

بالترتیب $\text{پ}، \text{پ}، \dots، \text{پ}$ ہیں، علم حیل کی کتابوں میں مجموعہ

م^۱ + م^۲ + م^۳ + + مⁿ لے
یا اختصاراً \sum م^۱ کو اس نظام ذرات کے جمود کا معیار اثر یا صرف معیار کہتے ہیں

محور کے گرد۔
جب یہ کمیتیں ایک مسلسل جسم کی شکل میں ہوں تو مائل جمع کی بجائے عمل تکمیل
کرنا ہو گا جیسا کہ جمود کے مرکوزوں کی صورت میں دیکھا گیا۔
اگر نظام کی کل کمیت صفر اور ک ایک مقدار اس طرح منتخب کی جائے کہ

$$م^۱ = - \sum م^۲ \quad ! \quad م^۱ = م^۲ م^۳$$

تو مقدار ک کو نظام کا گردش کا نصف قطر کہتے ہیں محور کے گرد جمود کے معیار اثر کو
بہم بالعموم صرف \sum سے تعبیر کریں گے۔
جمود کے معیار اثر معلوم کرنا عمل مسائل ذیل کی مدد سے آسان ہو جاتا ہے
(۱) لا و صا^۱ سے تین قائم محور ہیں، ایک مستوی پتھر
لا و صا^۱ میں واقع ہے اور اس کے جمود کے معیار اثر لا و صا^۱ و صا^۱ و صا^۱

کے گرد بالترتیب ج^۱، ج^۲، ج^۳ ہیں۔ تب

$$ج^۱ = ج^۲ + ج^۳$$

(۲) کسی محور و صا^۱ کے گرد جمود کا معیار اثر ج^۱ ہے، جسم کے مرکز جمود
شا میں سے گزرنے والے متوازی محور کے گرد معیار اثر ج^۲ ہے اور ان کو
کا باہمی فاصلہ ل ہے۔ تب

$$ج^۲ = ج^۱ + م^۱ ل^۲$$

جہاں م^۱ نظام کی کل کمیت ہے۔
ان مسائل کے ثبوت نہایت آسان ہیں، یہ طالب علم کے لئے چھوڑ دئے گئے ہیں۔

علم جیل کی کسی کتاب میں مل سکیں گے۔

مثال ۱۔ یکساں کثافت کی ایک پتلی سیدھی سلاخ کے جمود کا معیار اثر ایک ایسے محور کے گرد جو سلاخ کے ایک سرے میں سے گزرتا ہے اور اس پر عمود وار ہے۔
فرض کرو کہ سلاخ پر کے کسی نقطہ کا فاصلہ محور سے λ ہے، λ خطی کثافت ہے اور λ سلاخ کا طول ہے۔ کمیت کا جزو λ صف λ فرض کرو۔ پس

$$\text{جمود کا معیار اثر} = \int \lambda^2 \times \lambda \text{ صف } \lambda = \frac{1}{3} \lambda^3 = \frac{1}{3} \text{ م}^3$$

جہاں $\text{م} = \lambda$ سلاخ کی کمیت ہے، پس گردش کا نصف قطر $k = \frac{\lambda}{2}$ ۔
اگر گردش کا محور سلاخ کے نقطہ وتصفیف میں سے گزرے اور سلاخ پر عمود وار ہو تو اس کے گرد معیار $\frac{\text{م}^3}{12}$ ہوگا۔ یہ بلا واسطہ ثابت کیا جاسکتا ہے یا مسئلہ (۲) کو استعمال

کرنے سے۔
مثال ۲۔ یکساں مستطیل پتھر کے جمود کا معیار ایک ایسے محور کے گرد جو اس کے مرکز میں سے گزرتا ہے اور اس کے ایک ضلع کے متوازی ہے۔
فرض کرو کہ اضلاع کے طول λ و λ' ہیں اور محور ضلع λ کے متوازی ہے۔ پتھر کو ایسے باریک ٹکڑوں میں تقسیم کرو جو ضلع λ کے متوازی ہوں، فرض کرو کہ ایک ٹکڑے کی کمیت صف م ہے اور کل پتھر کی م ۔

مثال (۱) کی رو سے صف م کا معیار محور کے گرد صف $\text{م} \times \frac{\lambda^2}{12}$ ہے اسلئے کل مستطیل کے جمود کا معیار اثر $\frac{1}{12} \text{ م} \lambda^3$ ہوگا۔

اگر مرکز میں سے گزرے اور ضلع λ کے متوازی ہو تو اس کے گرد جمود کا معیار $\frac{\text{م}^3}{12}$ ہوگا، اس لئے مسئلہ (۱) کی رو سے جمود کا معیار ایک ایسے محور کے گرد جو مرکز میں سے گزرے اور پتھر کے کسی سطح پر عمود وار ہو $\frac{\text{م}(\lambda^2 + \lambda'^2)}{12}$ ہوگا۔

اوپر کے نتائج کو استعمال کرنے سے ہم ایک یکساں مستطیلی متوازی السطوح کا معیار ایک ایسے محور کے گرد باسانی معلوم کر سکتے ہیں جو مرکز میں سے گزرے اور ایک کنارے کے متوازی ہو۔ فرض کر دو کہ متوازی السطوح کے کنارے 'ا' ب' 'ج' ہیں اور گردش کا محور کنارہ ج کے متوازی ہے۔ مجسم کو کمیت صفا م کی پتلی تاشوں میں تقسیم کر دو جو کنارہ ج پر عمود وار ہوں۔ ایک تاش کے جمود کا معیار اثر مندرجہ بالا نتیجہ کی بناء سے صفا م $\frac{a^2 b^2}{12}$ ہے اس لئے مجسم کا معیار صفا م $\frac{a^2 b^2}{12}$ ہے جہاں ص م مجسم

کی کمیت ہے۔
مثال ۳۔ یکساں ناقصی پتیر کے جمود کا معیار محور اعظم کے گرد۔
ایسے خطوط کے ذریعہ جو محور اصغر کے متوازی ہوں پتیرے کو کمیت صف م کے
پینے ٹکڑوں میں تقسیم کرو۔

مثال (۱) کی رو سے اس ٹکڑے کا معیار صف م $\times \left(\frac{۲}{۱۲}\right)$ یعنی صف م $\times \frac{۲}{۳}$

ہے جہاں مائٹھ کے کامعین ہے۔
 اگر پتھر کی کثافت کہ ہو تو مف م = ۲ کہ مامف لا، اسلئے
 ج = ۱/۳ مامف م = ۲ کہ مامف لا = ۲/۳ کہ مامف لا × ۱/۳ کہ مامف لا = ۲/۳ کہ مامف لا
 لیکن کہ (لا) لا = ۲ کہ مامف لا = ۲/۳ کہ مامف لا = ۲/۳ کہ مامف لا = ۲/۳ کہ مامف لا
 رکھنے سے

دارہ کی صورت میں معیار ایک قطر کے گرد $\frac{1}{2}$ ہوگا [ب کو ا کے مساوی رکھنے سے] اور مرکز میں سے گزرنے والے محور کے گرد جو پتر سنی سطح پر عمود دار ہو معیار $\frac{1}{2}$ ہوگا۔

۱۔ مرکز کی قوت سے دارہ کو ایک ہم مرکز دائروں میں تقسیم کرنے سے باسانی مائل ہو سکتی ہے پھر چونکہ تشاکل کی رو سے تمام قطروں کے گرد جمود کے لمبا اثر مساوی ہوں گے اسیلئے مسئلہ (۱) سے ظاہر ہے کہ کسی قطر کے گرد کا معیار اس محور کے گرد کے معیار کا آدھا ہوگا جو مرکز میں سے گزرتا ہے اس سطح پر عمود دار ہے۔

مثال ۴۔ یکساں ناقص تنا کے جمود کا معیار اثر و ع کے گرد۔ مستوی تراشوں سے جو و ع پر عمود دار ہوں ناقص نما کو پتلی تاشوں میں تقسیم کرو۔

ایسی ایک تراش کی کیت مفام = ک ب ج (۱) - $\frac{1}{2}$ مفلا اور گزشتہ مثال کی رو سے مفام کا معیار و ع کے گرد $\frac{1}{2}$ مفام (ک + ب) جہاں ۲، ۲، ۲ ہیں اس تراش کے محور ہیں۔

لیکن $\frac{1}{2}$ = ب (۱) - $\frac{1}{2}$ ، ب = ج (۱) - $\frac{1}{2}$ ، ج = ک (۱) - $\frac{1}{2}$ فیتیں مندرجہ کرنے اور۔ ا سے ایک ٹکس کرنے سے جمود کا معیار اثر $\frac{1}{2}$ = ک ب ج (ب + ج) ک (۱) - $\frac{1}{2}$ فرلا = $\frac{ب + ج}{5}$ جہاں ۵ = ۲ ک ب ج

= ناقص نما کی کیت = دوسرے محوروں کے گرد کے معیار اثر و ع کے تشاکل حاصل ہو سکتے ہیں۔

۳۰۔ جہم کا قطبی جزو۔ طبعی مثالوں میں کسی نقطہ کے گردی قطبی محوروں

ک (لا زلا + ما فرسا + ع فرسا) فرس (۲)

نیز فرس کر کے صف میں سطح کا ایک جزو ہے، من جزو دومنہ (۱)۔
پہر ایک نقطہ ہے اور سطح کے نقطہ من پر کے عماد اور ص کی سمت کے دیرین
ذوایب صومہ بننا ہے تا تب

نکملہ ک ص جم صومہ فرس (۳)

کو جب سطح کے کسی حصہ پر لیا جائے تو ہم اس کو ص کا سطحی تکملہ اس حصہ پر کہیں گے۔
مثلاً اگر من پر برقی حدت ص ہو تو حدت کا عمادی جزو ترکیبی
ع = ص جم صومہ اور نکملہ (۳) سے عمادی برقی حدت کا سطحی تکملہ مراد
ہوگا سطح کے مذکورہ حصہ پر۔

مشق ۹

۱۔ ما کی اوسط قیمت سعت ۰ تا ۲۲ میں معلوم کرو جبکہ

(۱) ما = لہ جب لا + لہ جب ۲ لا + + لہ جب ن لا

(۲) ما = لہ جب لہ + لہ جب جم ۲ لا + + لہ جب ن لا

۲۔ اگر ما = لہ جب لا + لہ جب جم لا + لہ جب ۲ لا + لہ جب جم ۲ لا

اور می = لہ جب لا + لہ جب جم لا + لہ جب ۲ لا + لہ جب جم ۲ لا

تو حاصل ضرب ما می کی اوسط قیمت سعت ۰ تا ۲۲ کے اندر معلوم کرو۔

۳۔ ایک ذرہ حالت سکون سے آزادانہ گرتا ہے، ثابت کرو کہ اسکی اوسط رفتار
بلحاظ وقت کے آخری رفتار کی نصف ہے اور اسکی اوسط رفتار بلحاظ فاصلہ کے
آخری رفتار کی دو تہائی ہے۔

۴۔ کمیت م کا ایک ذرہ اپنی حرکت سے سادہ موسیقی حرکت پیدا کرتا ہے جبکہ

حیطہ ۱ ہے اور مدت دوران ۱۰۰ - ثابت کرو کہ اسکی اوسط توانائی بالحرکت اس کی توانائی بالحرکت کی قیمت اعظم کی نصف ہے۔

۵۔ اگر ایک مستوی رقبہ کو متجانس مائع کے اندر ڈوبا جائے تو ثابت کرو کہ مادیہ اثر کے زیر عمل رقبہ کے دباؤ کی اوسط حرکت وہی ہوگی جو رقبہ کے بندسی مرکز پر دباؤ کی حرکت ہے۔

۶۔ زمین کے مرکز سے فاصلہ r پر کثافت $k = \frac{1}{r}$ کی جبلت جہاں لی مستقل ہے ثابت کرو کہ اوسط کثافت

۳ (جبلت $\frac{1}{r}$ سے $\frac{1}{r}$ میں حجم $\frac{1}{r}$ پر $\frac{1}{r}$ سے $\frac{1}{r}$)

ہے جہاں r زمین کا نصف قطر ہے۔ [پیمہ کا احصا]

حجم کا جزو $\frac{1}{r}$ جہاں $\frac{1}{r}$ نصف قطر اور $\frac{1}{r}$ نصف ر، والی دو گردی سطحوں کے درمیان کے خول کا حجم ہے۔ $\frac{1}{r} = \frac{1}{r} - \frac{1}{r}$ اور $\frac{1}{r} = \frac{1}{r} - \frac{1}{r}$ کی قیمت اگلی $\frac{1}{r}$ کو $\frac{1}{r}$ سے $\frac{1}{r}$ تک مکمل کرنے سے حاصل ہوگی۔

۷۔ ذیل کی صورتوں میں جو رقبہ یا حجم ہیں ان کے بندسی مرکز معلوم کرو۔

(۱) رقبہ جو مکانی کی قوس، محور اور (اھ، ک) میں سے گزرنے والے مسبین کے درمیان گھرا ہوا ہے۔

(۲) قطعہ مکانی جو رأس اور نقطہ (اھ، ک) کے ملانے والا خط مستقیم منحنی سے قطع کرتا ہے۔

(۳) قطعہ $\frac{1}{r}$ ع ج (شکل ۶۷)

(۴) گردی قطعہ جو قطاع دائرہ $\frac{1}{r}$ ع ج (شکل ۶۷) کو $\frac{1}{r}$ کے گرد گھمانے سے حاصل ہوتا ہے۔

(۵) خط صنوبری $\frac{1}{r}$ (۱۰۰ حجم $\frac{1}{r}$)

۸۔ ایک نصف کرہ کے کسی قطعہ پر کثافت ایسے بدلتی ہے جسے احاطہ کرنے والی مستوی سطح سے اس نقطہ کا فاصلہ۔ ثابت کرو کہ اس سطح سے مرکز جمود کا فاصلہ $\frac{1}{r}$ ہے جہاں r نصف قطر ہے۔

۹۔ پیمہ کے مسئلے ثابت کرو یعنی

(۱) اگر ایک مستوی منحنی کی قوس ایک محور کے گرد گردش کرے جو اس کی سطح میں واقع ہو لیکن اسے قطع نہ کرے تو اسکے گھومنے سے جو سطح پیدا ہوگی اس کا رقبہ = قوس کا طول \times اس کے مرکز ہندسی کے طریق کا طول۔

(۲) ایک مستوی رقبہ ایک ایسے محور کے گرد گھومتا ہے جو اس کی سطح میں واقع ہے لیکن اسے قطع نہیں کرتا۔ ثابت کرو کہ رقبہ کے گھومنے سے جو حجم پیدا ہوتا ہے وہ = رقبہ \times رقبہ کے ہندسی مرکز کے طریق کا طول۔
 گردش کے محور کا مانو۔ مذکورہ بالا مسائل ۲۲ کے ساتھ ضرب دینے سے ذیل کی مساواتوں سے حاصل ہونگے

ما ک فرس = ک ما فرس، ما ک فرس = ک ما فرس = $\frac{1}{2} \pi r^2$ (۱) (۲) (۳)
 آخری تینوں میں 'ما' 'ما' ان نقطوں کے معین ہیں جہاں ایک سطح مستقیم جو محور کا پیرامیٹر ہے منحنی کو قطع کرتا ہے۔
 (۱) یہاں 'ما' یعنی سطح (رقبہ ۲۰) کی صورت میں حجم کے قطبی جزو کے لئے ضابطہ حاصل کیے۔

۱۰۔ (۱) دیا گئی صورتوں میں جمود کے معیار معلوم کرو۔ شناخت کیساں ہے۔
 (۱) کیت ہر کے ایک پیرامیٹر کا معیار اس کے راس کے گرد پیرامیٹر کا نصف قطر ہے۔
 (۲) کیت ہر کے ایک پیرامیٹر کا معیار محاورہ خط کے گرد، کرہ کا نصف قطر ہے۔
 (۳) کیت ہر کے ایک مثلثی پیرامیٹر کا معیار قاعدہ کے گرد۔ پیرامیٹر کا ارتفاع

۱۱۔ (۱) ایک قائم منحنی کا کیت ہر ہے، ارتفاع 'ف' اور قاعدہ کا نصف قطر 'ر'۔
 (۲) راس میں سے گزرنیوالے ایک ایسے محور کے گرد (۱) اسکے محور کے گرد (۲) راس میں سے گزرنیوالے ایک ایسے محور کے گرد قاعدہ کے متوازی ہے۔

۱۲۔ ایک مستطیل (۱) کیت ہر ایسے محور کے گرد گردش کرتا ہے جو اس کی سطح میں (۲) کیت ہر ایسے منحنی کو قطع نہیں کرتا، اگر

(ب) ج ۵ کے فاصلے محور سے ۱، ب ہوں تو ثابت کرو کہ مجسم کی گردش کا

$$\text{نصف قطر ک} = \frac{1}{4} (ا + ب)$$

۱۲۔ نگر چھلے (مشق ۷، مثال ۵) کے جہود کا معیار اثر محور کے گرد
مہ (ج + ا) = ۲ (ا) ہے اگر مجسم کی کثافت یکساں فرض کی جائے۔

۱۳۔ اگر $ا = لا + ما + می$ تو ثابت کرو کہ $ا$ کی اوسط قیمت ناقص ما

$$\frac{لا}{ا} + \frac{ما}{ب} + \frac{می}{ج} = ۱ \text{ کے حجم ہمیں } \frac{ا + ب + ج}{۵} \text{ ہے۔}$$

۱۴۔ اس فائدہ کا حجم جو اسطوانہ $(ا + ما) = ۲$ لا اور مستوی سطوح
 $می = لا$ مس عدا اور $می = لا$ مس عدا کے درمیان گھرا ہوا ہے
" (مس عدا - مس عدا) ہے۔

۱۵۔ اگر $ن <$ تو تکملہ $م$ کو لا $ا$ فر لا کی ایک معین قیمت ہے۔
یہ تکملہ $ن$ کا تفاعل ہے جسے بالعموم $ن$ کا تفاعل کہتے ہیں، اسے ہم مثلاً ج (ن)
سے تعبیر کرتے ہیں۔
تکملہ بالخصوص سے ثابت کرو کہ

$$\text{ج (ن)} = (ن - ۱) \text{ ج (ن - ۱)} \dots \dots \dots (۱)$$

اور جس صورت میں $ن$ صحیح عدد ہو تو ج (ن) = (ن - ۱) ج (ن - ۱) = ۱
اگر $ن$ صحیح عدد نہ ہو تو فرض کرو کہ $ن$ سے عین چھوٹا صحیح عدد $د$ ہے، یعنی
(ن - د) کسر واجب ہے۔ تب (۱) سے ظاہر ہے کہ

$$\text{ج (ن)} = (ن - ۱) (ن - ۲) \dots \dots (ن - د) \text{ ج (ن - د)} \dots \dots (۲)$$

۱۶۔ ثابت کرو کہ

$$(۱) \text{ ج (} \frac{۱}{۲} \text{)} = \pi$$

$$(۲) \text{ ج (} \frac{۱}{۲} + م \text{)} = \frac{۱ - م^۲}{۲} \times \frac{۱ - م^۲}{۲} \times \dots \times \frac{۱ - م^۲}{۲} \text{ ج (} \frac{۱}{۲} \text{)} \text{ صحیح عدد}$$

دفعہ ۲، مثال ۳ میں لا = مای رکھنے سے مساوات (۱) حاصل ہوتی ہے

$$\frac{1}{p} = \frac{m}{p} \text{ تو لا فرلا} = \frac{1}{p} \text{ م تو می} = \frac{1}{p} \text{ افری} = \frac{1}{p} \text{ جاکا} \left(\frac{1}{p} \right)$$

پھر مساوات (۲) حاصل ہوتی ہے مثال ۱۵ (۲) مندرجہ بالا سے۔

۱۷۔ ثابت کرو کہ $\frac{1}{p} \text{ تو لا لا} = \frac{1}{p} \text{ فرلا} = \frac{1}{p} \text{ جاکا (ن)} [\text{لا مثبت}]$

۱۸۔ مندرجہ ذیل ابدال استعمال کرنے سے جاکا (ن) کے لئے اور ضابطے ثابت کرو

لا = ر جاکا (ن) = $\frac{1}{p} \text{ تو لا} = \frac{1}{p} \text{ ر فر} \dots \dots \dots (۱)$

تو لا = می جاکا (ن) = $\frac{1}{p} \text{ (لوک جی)} = \frac{1}{p} \text{ افری} \dots \dots \dots (۲)$

۱۹۔ جب م اور ن دونوں مثبت ہوں تو مکملہ

$\frac{1}{p} \text{ لا} = \frac{1}{p} \text{ (لا)} = \frac{1}{p} \text{ فرلا}$

کی ایک معین قیمت ہے یہ قیمت م اور ن کا تقاضا ہوگی، اسے بیضا تقاضا کہتے ہیں، ہم اسے جاکا (م، ن) سے تعبیر کریں گے

ثابت کرو کہ جاکا (م، ن) = جاکا (ن، م) سے جاکا (م، ن) کے لئے اور ضابطے حاصل کرو

لا = جم طما، جاکا (م، ن) = $\frac{1}{p} \text{ جم طما} = \frac{1}{p} \text{ جم طما جب} = \frac{1}{p} \text{ فرطما} \dots \dots (۱)$

لا = $\frac{1}{p} \text{ جاکا (م، ن)} = \frac{1}{p} \text{ جاکا (ن، م)} = \frac{1}{p} \text{ فرما} \dots \dots \dots (۲)$

۲۱۔ مثال ۱۸ کی شکل (۱) کو استعمال کرنے سے لکھو

جاء (م) = ∞ کو لا $۲-۴۲$ - فر لا جاء (ن) = ∞ کو لا $۱-۴۲$ - فر لا

اور پھر دفعہ ۲، مثال ۳ کی مانند دکھاؤ کہ

جاء (م) \times جاء (ن) = ∞ کو لا $۲-۴۲$ - فر لا جاء (ن) = ∞ کو لا $۱-۴۲$ - فر لا جاء (ن) = ∞ کو لا $۱-۴۲$ - فر لا

اس لئے اسلئے ۱۸ (۱۵) اور ۲۰ (۱۵) کی مدد سے

جاء (م) جاء (ن) = جاء (م + ن) با (م + ن)

اس طرح پیشہ تفاعل گانا تفاعل کی رقوم میں بیان ہو سکتا ہے۔

۲۲۔ فرض کرو کہ ۴۲ - ۱ = ۴۱ = ۴۰ - ۱ = ۳۹ = ۳۸ - ۱ = ۳۷ = ۳۶ - ۱ = ۳۵ = ۳۴ - ۱ = ۳۳ = ۳۲ - ۱ = ۳۱ = ۳۰ - ۱ = ۲۹ = ۲۸ - ۱ = ۲۷ = ۲۶ - ۱ = ۲۵ = ۲۴ - ۱ = ۲۳ = ۲۲ - ۱ = ۲۱ = ۲۰ - ۱ = ۱۹ = ۱۸ - ۱ = ۱۷ = ۱۶ - ۱ = ۱۵ = ۱۴ - ۱ = ۱۳ = ۱۲ - ۱ = ۱۱ = ۱۰ - ۱ = ۹ = ۸ - ۱ = ۷ = ۶ - ۱ = ۵ = ۴ - ۱ = ۳ = ۲ - ۱ = ۱ = ۰

جاء (م) جاء (ن) = جاء (م + ن) با (م + ن)

جہاں چونکہ م < ن < ۱ اس لئے ۱/۲ (ف + ۱) < ۱/۲ (ق + ۱) < ۱

یعنی ف اور ق میں سے ہر ایک - ۱ سے بڑا ہے۔

طالب علم اس کی جانچ کرے کہ اس نتیجہ میں دفعہ ۱۰ کا قاعدہ شامل ہے۔

لو کہ جاء (ن) کی جدولیں ۱ \geq ن \geq ۲ کے لئے مرتب کی گئی ہیں

(مثال ۱۵ (۲) کی رود سے ن کے لئے اس سے بڑی سمت کی ضرورت نہیں)

کئی کئی کھلے گانا 'تفاعلوں کی رقوم میں بیان ہو سکتے ہیں۔

۲۳۔ ایک کرہ کا نصف قطر ۱ ہے، اس کی سطح پر کجیت ہر کیساں طور پر پھیلا دی

ہے (کثافت کہا) اس کجیت کا قوہ و کسی نقطہ ع پر معلوم کرو۔

کرہ کے مرکز کو مبدأ مانو اور و ع کو محور لے، فرض کرو کہ نقطہ ح پر

کرہ کی سطح کا جزو فرس ہے۔ فرض کرو کہ ح ع = صا اور و ع = ج

و = کہ فرس = فرس = و جب ط ط فرط فرط = و + ج - ۲ = ج ط ط

فدا کے لئے مزدور تا ۲۲ ہیں اور طما کے تا ۲۲۔ بلحاظ فدا کے مکمل کرنے
 ہیں دوسرا متغیر طما اور اس لئے اس صورت میں جن ع یعنی س (جو طما
 کا تفاعل ہے اور فدا کا نہیں ہے) مستقل رکھا جائیگا۔ اس لئے

$$و = کہ \frac{و}{ج} = جب طما فرطما \frac{و}{ج} = فرطما = ۲۲ کہ \frac{و}{ج} = جب طما فرطما$$

اب متغیر کو طما سے مس میں بدلو، اس طرح حاصل ہوگا مس فرس = وج جب طما
 جب طما = ۰ تو مس = $\pm (ج - ج)$ مس ایک مثبت عدد ہے، پس اگر
 غ کرہ کے باہر ہو تو مس = ج۔ و اور اگر غ کرہ کے اندر ہو تو مس = $ج - و$ ۔ ج
 اگر طما = ۲۲ تو مس = $و + ج$ دونوں صورتوں میں۔

$$اے و = ۲۲ کہ و = [\frac{و}{ج}] = \frac{۲۲ کہ و}{ج} (ع کرہ کے باہر) \dots (۱)$$

$$۲۲ کہ و = (ع کرہ کے اندر) \dots \dots (۲)$$

پس و = ج جبکہ ع کرہ کے باہر ہو لیکن و = $\frac{و}{ج}$ مستقل
 جبکہ ع کرہ کے اندر ہو۔

۶۴۔ وہی سوال جو مثال ۲۳ میں ہے مجسم کرہ کے لئے [کثافت ک مستقل]
 نصف قطر و اور ل = فر د کی کروی سطحوں کے درمیان جو غل ہے اس کو کمیت
 کا جزو قرار دو۔ مثال ۲۳ کے کہ کی بجائے ک فر و اور و کی بجائے و رکھ کر
 اس کے نتائج کو استعمال کرو۔

اگر ع باہر واقع ہو تو نتیجہ (۱) سے حاصل ہوگا

$$و = کہ \frac{و}{ج} = فر د = \frac{۲۲ کہ و}{ج} = \frac{۲۲ کہ و}{ج} \dots \dots (۳)$$

اگر ع کرہ کے اندر ہو تو و دو حصوں پر مشتمل ہوگا و اور و۔

توہ ω نصف قطر ج کے کرہ کی وجہ سے پیدا ہوگا اور اوپر کے نتیجہ کی مدد سے

$$\omega = \frac{\pi^2 k}{3} \times \frac{\pi^2 k}{3} = \frac{\pi^2 k}{3} \times \frac{\pi^2 k}{3}$$

توہ ω اس محل کی وجہ سے پیدا ہوتا ہے جس کے نصف قطر ج اور ω ہیں۔
مثال ۲۳ کے نتیجہ (۲) کی رو سے

$$\omega = \int \pi^2 k \, r \, dr = \pi^2 k (r^2 - r'^2)$$

اس لئے $\omega = \omega + \omega = \pi^2 k (r^2 - r'^2) + \pi^2 k (r'^2 - r''^2) + \dots + \pi^2 k (r''^2 - r'''^2) + \dots$
جب $r = 0$ تو (۳) اور (۴) سے جو قیمتیں حاصل ہوتی ہیں وہ ایک ہی ہیں۔



باب چہارم انحنا لفاف

۲۱۔ انحنا۔ فرض کرو کہ ایک مستوی منحنی پر نقطے $ن$ اور $ق$ ہیں اور $ن$ اور $ق$ پر کے ماس محور $لا$ کے ساتھ زاویے $فنا$ ، $مف$ $فنا$ بناتے ہیں اور منحنی پر کے کسی ثابت نقطہ سے $ن$ تک کی قوس کا طول $س$ ہے اور قوس $ن$ $ق$ ، $مف$ $س$ ہے $ان$ اور $ق$ پر کے ماسوں کا درمیانی زاویہ $مف$ $فنا$ ہوگا (شکل ۲۹، صفحہ ۱۳۱)

تشریفات (۱) زاویہ $مف$ $فنا$ قوس $ن$ $ق$ کا کل انحنا کہلاتا ہے۔

(۲) $\frac{مف}{مف س} فنا$ کو قوس $ن$ $ق$ کا اوسط انحنا کہتے ہیں۔

(۳) $\frac{مف}{مف س}$ کی انتہا $\frac{فر فنا}{فر س}$ کو جبکہ $ق$ انتہائی صورت میں $ن$ کے لانا تھا قریب آجائے منحنی کا انحنا نقطہ $ن$ پر کہتے ہیں۔

ایک دائرہ کے لئے جس کا نصف قطر $س$ ہو $مف س = س$ $مف فنا$

اسلئے $\frac{مف فنا}{مف س} = \frac{ا}{س}$ ، $\frac{فر فنا}{فر س} = \frac{ا}{س}$ (۱)

یعنی دائرہ کی کسی قوس کا اوسط انحنا دائرہ کے کسی نقطہ پر کے انحنا کے مساوی ہوتا ہے اور سب سے الفاظ میں دائرہ ایک ایسا منحنی ہے جس کا انحنا مستقل ہے اور اس کا انحنا اسکے نصف قطر کے متکافی کے مساوی ہے۔

انحنا ایک ایسی مقدار ہے جس کا بعد طول کے لحاظ سے ۱ ہے۔

انہا کسی نقطہ کے معین کے پہلے اور دوسرے مشتقوں کی رقوم میں بیان ہو سکتا ہے۔
اور وہ اس طرح

$$\text{مس} \text{ فہ} = \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} ، \text{جم} \text{ فہ} = \frac{\text{فرلا}}{\text{فرس}}$$

پہلی مساوات کو بلحاظ مس کے تفریق کرنے سے

$$\frac{\text{فرمس} \text{ فہ}}{\text{فر فہ}} \times \frac{\text{فر فہ}}{\text{فرس}} = \frac{\text{فر فہ}}{\text{فرس}} - \left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} \right) \frac{\text{فرلا}}{\text{فرس}}$$

$$\text{یعنی قہ} \text{ فہ} = \frac{\text{فر فہ}}{\text{فرس}} = \frac{\text{فر فہ}}{\text{فرلا}} \frac{\text{فرلا}}{\text{فرس}} = \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} \div \text{قہ} \text{ فہ}$$

$$\text{اسلئے} \frac{\text{فر فہ}}{\text{فرس}} = \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} \div \text{قہ} \text{ فہ} \dots \dots \dots (۲)$$

$$\text{اب چونکہ قہ} \text{ فہ} = 1 + \left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} \right)^2 \text{ اسلئے}$$

$$\frac{\text{فر فہ}}{\text{فرس}} = \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} \div \left\{ 1 + \left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} \right)^2 \right\} \dots \dots \dots (۳)$$

(۳) کو اساسی ضابطہ تصور کیا جائے۔

نتیجہ صریح جس صورت میں ڈھال $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$ استقرار چھوٹا ہو کہ سخت زیر

بحث میں اس کا مربع نظر انداز ہو سکے تو انہما تقریباً $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$ ہوگا، علم حیل میں خاصکر
شہتیروں کے جھکنے کے نظریہ میں یہ تقریبی قیمت اکثر استعمال ہوتی ہے۔

مثال ۱۔ مکانی ما = ۵۵

$$\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{۵۲}{۱۰} ، \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{۵۲}{۱۰} - \frac{۵۲}{۱۰} = \frac{۵۲}{۱۰}$$

$$\text{فرس} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \left\{ \frac{2}{\sqrt{3}} + 1 \right\} \div \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

اگر کتب (لا، ما) پر کا عماد محور سے گ پر لئے تو

$$\text{ن گ} = \frac{2}{\sqrt{3}} + 1 \text{ اور } \frac{2}{\sqrt{3}} = \text{فرس} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

منفی علامت کے مفہوم کی طرف دفعہ ۳۲ میں توجہ کی جائیگی۔

$$\text{شال ۲۔ ناقص} = \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} = 1$$

$$\text{فرس} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

کیونکہ ناقص کی مساوات سے $\frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}} = 1$ اور $\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$

$$\text{اس لئے فرس} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

اگر مرکز سے نقطہ (لا، ما) پر کے ماس پر عمود کھینچا جائے اور اس کا طول ع ہو تو

$$\text{ع} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

اگر کتب (لا، ما) پر کا عماد ہو تو

$$\text{ن گ} = \frac{2}{\sqrt{3}} + 1 \text{ اور } \frac{2}{\sqrt{3}} = \text{فرس} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

اسی طرح کا نتیجہ زائد کے لئے درست ہے۔ اس سے معلوم ہوتا ہے کہ کسی مخروطی تراش کا انحناء عماد کے کعب کے بالعکس بدلتا ہے۔

۳۲۔ دائرہ انحناء نصف قطر مرکز دائرہ انحناء۔

فرض کرو کہ ن اور ق پر کے عماد نقطہ ح پر ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں (شکل ۲۹) جب ق انتہائی صورت میں ن پر آئیگا تو عمادوں کا نقطہ

نصف قطر انحناء کیلاتا ہے اور اس کا مرکز ح کن پر کے دائرۂ انحناء کا مرکز کہلاتا ہے اگر کن میں سے گزرنے والا کوئی خط دائرہ کو دوبارہ ط پر ملے تو ح ط کہلاتا ہے۔

اگر کن کے محدد (لا، نا) ہوں، ح کے (ضا، عا) اور انحناء کے نصف قطر

ح یعنی فرس کو س سے تعبیر کیا جائے تو یہ باسانی ثابت ہو سکتا ہے کہ

ضا = لا۔ س جب فہ، عا = ما + س، جم فہ..... (۱)
ہم نصف قطر انحناء کو بالعموم س سے تعبیر کریں گے اس طرح انحناء س سے تعبیر ہوگا۔

اگر فرما نقطہ ح پر صفر ہو تو (د) کی رو سے س یا ح لا متناہی ہو گا پس معلوم ہوا کہ منفی کے نقطہ انعطاف پر س لا متناہی ہوتا ہے۔

نکسل ۲۹ کو ہم معیاری تصویر یا نیٹے اگر اس قرار داد کو ہم تسلیم کر لیں کہ فہ ہمیشہ مادہ ہوگا (دفعہ ۲ حصہ اول) تو فرس اور اقط فہ ہمیشہ مثبت ہونگے اور (د) میں جذر کی علامت

مثبت ہوگی۔ اس لئے س اور س دونوں مثبت ہونگے اگر فرما مثبت ہو اور لا

منفی ہونگے اگر فرما منفی ہو یعنی س اور س مثبت ہونگے اگر کن کے نزدیک

منفی اور پر کی طرف منفر ہو اور منفی ہونگے اگر منفی اور پر کی طرف محذب ہو اور قرار داد

سے کام لیا جاسکتا ہے لیکن اگر شکل بنائی جائے تو ذرا سی احتیاط سے علامت کا سوال

طے ہو سیکے گا۔ لیکن اکثر اوقات عددی قیمت ہی ضروری اور مطلوب ہوتی ہے۔

نقطہ ح کے انتہائی مقام ح کو بعض اوقات متصل عمادوں کا نقطہ تقاطع

کہتے ہیں، لیکن کوئی ایک عماد نہیں ہے جو کسی ایک عماد کا متصل ہو مگر اس طرزیان میں یہ نسبت اچھلے جو اس دفعہ کے شروع میں وجہ ہے اختصار ہے اس لئے بعض اوقات اسے استعمال کرتے ہیں۔

یہ قابل توجہ ہے کہ جب قوس حناقی رتبہ اول کا صفاریہ ہو تو حناقی ح
 اور ق ح کا فرق اعلیٰ رتبہ کا صفاریہ ہو گا کیونکہ ق ح - حناقی کی انتہا
 صف س

منہرہ اور وہ اسے لکھ قحیح بن حح = قحیح (اجم مفاد)۔ بن قحیح بن حح

۳۳۔ انہما کے لئے اور ضابطے - ضابطہ (۱) اتنا سہولت بخش

ثابت نہیں ہوتا جب تک کہ منحنی کی مساوات اس شکل $Ma = f(\lambda)$ میں نہ دی ہوگی
ہو یا مستقیم کی قیمتیں یا آسانی نہ محسوب ہو سکیں جیسا کہ دفعہ اس کی مثالوں میں دیکھے
ہم ایک دو ضابطے اس جگہ اور حاصل کرینگے، واقع ہو کہ اس کی علامت خاص توجہ
کے قابل ہوتی ہے۔

(۱۱) لا = ف (ت) ، ماء فارت کی شکل کی مساوت۔

ہم لا، ما کے شفق کو اختصار کی خاطر نہ بروں سے تعبیر کریں گے

(۱) میں عفا، عفو، ماکھی قیمتیں لگاؤ، ماکھی رقوم میں بیان کرو۔ یہ قیمتیں دفعہ اول میں معلوم کی گئی ہیں ایسا کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$(ب) \dots\dots\dots \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

ضابطہ (ج) بے ڈول ہے، اکثر اوقات یہ زیادہ آسان ہوتا ہے کہ منحنی کی 'ع' اور مساوات معلوم کی جائے کہ منحنی کے ہر نقطہ کے لئے عمود ϕ سے (جو مبدأ ϕ سے کسی نقطہ ϕ تک) شکل (۲۹) پر کے ماس پر کھینچا جائے اور سمتی نیم قطر ϕ کے درمیان ربط معلوم کیا جائے اور پھر انما معلوم کرنے کے لئے یہ ضابطہ استعمال کیا جائے جو ابھی اہم حال کرتے ہیں

$$\begin{aligned} \text{و ح} &= \text{و ح} + \text{ح ح} - \text{و ح} \times \text{ح ح} = \text{و ح} \\ &= \text{و ح} + \text{ح ح} - \text{و ح} \times \text{ح ح} \end{aligned}$$

کیونکہ $\text{و ح} = \text{و ح} + \text{ح ح} = \text{و ح} + \text{ح ح} = \text{و ح} + \text{ح ح}$ جب سا جہاں سا صاحب

مع دول ماس اور سمتی نیم قطر کا درمیانی زاویہ ہے۔
اگر $\text{و ح} = \text{و ح} + \text{ح ح} + \text{و ح} = \text{عمود نقطہ } \phi$ سے ϕ کے ماس پر تو اسی طرح حاصل ہوگا

$$\text{و ح} = (\text{و ح} + \text{ح ح}) + \text{و ح} - \text{و ح} \times \text{ح ح} = \text{و ح} + \text{ح ح} + \text{و ح} - \text{و ح} \times \text{ح ح}$$

و ح کی دونوں قیمتیں مساوی رکھنے سے

$$2 \text{ و ح} + \text{ح ح} = (\text{و ح} + \text{ح ح}) + \text{و ح} - \text{و ح} \times \text{ح ح} = \text{و ح} + \text{ح ح} + \text{و ح} - \text{و ح} \times \text{ح ح}$$

$$2 \text{ و ح} + \text{ح ح} = \text{و ح} + \text{ح ح} + \text{و ح} - \text{و ح} \times \text{ح ح}$$

لیکن $\text{و ح} - \text{و ح} = \text{و ح}$ اور $(\text{و ح} + \text{ح ح})$ سے بڑے رتبہ کے ہیں

$$\text{اس لئے مساوی} = \text{و ح} = \frac{\text{و ح}}{\text{و ح}} \dots \dots \dots (۵)$$

ضابطہ (۵) اس طرح بھی حاصل ہو سکتا ہے۔

چونکہ $\text{و ح} = \text{و ح} + \text{ح ح} = \text{و ح} + \text{ح ح} = \text{و ح} + \text{ح ح}$ اس لئے (دفعہ مدہ مصل اول)

$$\frac{\text{فرع}}{\text{در}} = \text{جب سما} + \text{رجم سما} \frac{\text{فرسا}}{\text{در}} = \frac{\text{در طما}}{\text{در}} + \frac{\text{در سا}}{\text{در}} = \frac{\text{در ف}}{\text{در}}$$

$$\text{اس لئے } \frac{\text{فرس}}{\text{فر}} = \frac{\text{در ف}}{\text{در}}$$

اشکال کے دیکھنے سے معلوم ہوگا کہ جب منحنی مبدأ کی طرف منقسم ہو (جیسا کہ قطع ناقص کی صورت میں جبکہ مرکز مبدأ ہو) تو ر اور ر ایک ساتھ بڑھتے اور گھٹتے ہیں

اس لئے $\frac{\text{فرس}}{\text{فر}}$ اور $\frac{\text{در ف}}{\text{در}}$ دونوں مثبت ہوتے ہیں۔ جب منحنی مبدأ

کی جانب محذب ہو تو $\frac{\text{فرس}}{\text{فر}}$ منحنی ہوتا ہے۔
اب ہم (ج) کو (د) سے حاصل کر سکتے ہیں کیونکہ (دفعہ ۸۸ حصہ اول سے)

$$\frac{\text{مس سما}}{\text{در}} = \frac{\text{در طما}}{\text{در}}$$

$$\text{اور } \frac{1}{ع} = \frac{1}{ر} + \frac{1}{ر} = \frac{1}{ر} + \left(\frac{1}{ر} + \frac{1}{ر} \right) + \dots + \frac{1}{ر} \quad (۱)$$

اور بلحاظ ر کے تفریق کرنے سے ہم $\frac{\text{فرع}}{\text{فر}}$ معلوم کر سکتے ہیں۔

اب ہم اس سے ذرا مختلف ضابطہ حاصل کرینگے جو علم حرکت میں اکثر استعمال ہوتا ہے۔ رکھو $\frac{1}{ر} = \frac{1}{ع}$ ، اس طرح مس ع اور اطلہ کی رقوم میں حاصل ہوگا۔

$$\frac{\text{فر}}{\text{فرطہ}} = \frac{\text{فر}}{\text{فرع}} - \frac{1}{ع} = \frac{\text{فر}}{\text{فرطہ}}$$

اس طرح مساوات (۱) ہو جائیگی

$$\frac{1}{ع} = \frac{1}{ع} + \left(\frac{\text{فرع}}{\text{فرطہ}} \right) + \dots + \frac{\text{فرع}}{\text{فرطہ}} \quad (۲)$$

اب بلحاظ ع کے تفریق کرنے سے

مثال ۱۔ $\frac{1}{3} = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}$

فرض کرو کہ $\frac{1}{3} = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}$ اور $\frac{2}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$ اور $\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$ استعمال کرو
 $\frac{1}{3} = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}$ اور $\frac{2}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$ اور $\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$ استعمال کرو
 $\frac{1}{3} = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}$ اور $\frac{2}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$ اور $\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$ استعمال کرو
 $\frac{1}{3} = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}$ اور $\frac{2}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$ اور $\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$ استعمال کرو
 $\frac{1}{3} = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}$ اور $\frac{2}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$ اور $\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$ استعمال کرو

اس صورت میں $\frac{1}{3} = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}$ اور $\frac{2}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$ اور $\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$ استعمال کرو
 دستور کے موافق لیا جائے تو یہ $\frac{1}{3} = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}$ اور $\frac{2}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$ اور $\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$ ہوگا۔

مثال ۲۔ $\frac{1}{3} = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}$

اس نغنی کی ع، ر مساوات مرتب کرو اور ضابطہ (د) استعمال کرو۔

س سسا = $\frac{1}{3} = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}$ اور $\frac{2}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$ اور $\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$ استعمال کرو
 ہم لینگے سسا = $\frac{1}{3} = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}$ اور $\frac{2}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$ اور $\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$ استعمال کرو
 ع = رجب سسا = رجب م طما = $\frac{1}{3} = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}$ اور $\frac{2}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$ اور $\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$ استعمال کرو

اس لئے $\frac{1}{3} = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}$ اور $\frac{2}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}$ اور $\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$ استعمال کرو

م کو مختلف قیمتیں دینے سے ہمیں کئی مشہور مساواتیں حاصل ہوتی ہیں۔

ملاحظہ ہو مشق ۱۰ سوال (۱۰)

مثال ۳۔ قطع ناقص کے انہما کا مرکز اور اس مرکز کا طریق معلوم کرو۔
 ترجمہ دفعہ ۳ مثال ۲ کے موافق یہ ثابت کرنا آسان ہے کہ

$$\text{جب فہ} = \frac{\text{ع لا}}{\text{ب}} ، \text{جم فہ} = \frac{\text{ع ما}}{\text{ب}} ، \text{س} = \frac{\text{ع ب}}{\text{ع}}$$

$$\text{ضہا} = \text{لا} - \text{س} ، \text{جب فہ} = \text{لا} - \left(\frac{\text{ب}}{\text{ع}} \right) ، \text{عہ} = \text{ما} - \left(\frac{\text{ب}}{\text{ع}} \right)$$

اگر (لا، ما) کا خارج مرکز نزاد یہ طہ ہو تو قیمتیں ہو جائیں گی

$$\text{وضہا} = (\text{ب} - \text{ب}) ، \text{جم طہ} = \text{ب عہ} = (\text{ب} - \text{ب}) ، \text{جب طہ}$$

مرکز انخا کا طریق معلوم کرنے کے لئے طہ کو سا قط کرو

$$(\text{وضہا}) + (\text{ب عہ}) = (\text{ب} - \text{ب})$$

اب اگر رواں معدو لا، ما ہوں تو

$$(\text{لا}) + (\text{ب ما}) = (\text{ب} - \text{ب})$$

اس منحنی کی ترسیم کے لئے ملاحظہ ہو شکل ۳۰ دفعہ ۳۴۔

مثال ۴۔ ثابت کرو کہ ایک منحنی کے کسی نقطہ (ن) پر کا عمودی اسراع $\frac{v^2}{r}$ ہے

جہاں و مماسی رفتار ہے اور $\frac{1}{r}$ نقطہ (ن) پر منحنی کا انحناء ہے۔

(شکل ۲۹) فرض کرو کہ (ق) بر مماسی رفتار و + ممف و ہے، (ن) ح کی سمت میں (ن) اور (ق) پر کی رفتاروں کے اجزاء ترکیبی بالترتیب صفر اور (و + ممف و) جب ممف فہ ہیں، اس لئے (ن) پر کا عمادی اسراع ہے

$$\text{مف فہ} = \frac{(\text{و + ممف و}) \times \text{ممف فہ}}{\text{ممف فہ}} = \frac{\text{ممف فہ}}{\text{ممف فہ}} \times \text{ممف فہ}$$

$$= \frac{1}{r} \times \text{و}$$

اور یہی ثابت کرنا مطلوب تھا۔

مشق ۱۰

۱۔ کسی مخروطی کی مساوات اس شکل میں لکھی جاسکتی ہے $\text{ما}^2 = ۲\text{لا} + \text{ب}^2$ جہاں محور لا ماسکی محور ہے اور ۲ وتر خاص کا طول ہے۔ اگر ح پر کا عمود محور لا سے گ پر ملے اور ح گ اور ماسکی فاصلہ میں ح کے درمیان زاویہ ع بنے تو ثابت کر دو کہ

$$\text{س} = \frac{\text{ح}^2}{\text{گ}^2} = \frac{\text{ح}^2}{\text{جم}^2}$$

یہ قابل توجہ ہے کہ ح کا ظل میں ح پر نیم وتر خاص کے مساوی ہے۔
۲۔ مثال امیں جو س کی قیمت ع کی رقوم میں معلوم کی گئی ہے اس سے کسی مخروطی تلاش کے مرکز انحصار معلوم کرنے کا یہ عمل ثابت کر دو۔ ح کو ح گ پر عمود وار کھینچو اور فرض کرو کہ یہ ح میں سے ح پر ملتا ہے۔ پھر ح گ کو ح ح پر عمود وار کھینچو اور اسے اتنا بڑھاؤ کہ ح گ سے یہ ح پر ملے۔ ح مرکز انحصار ہوگا۔

۳۔ قائم زائد کے لئے $\text{لا} = \text{ع}^2$ ثابت کر دو کہ

$$\text{س} = (\text{لا} + \text{ما}^2) / \frac{۲}{۳} \text{ج}^2$$

۴۔ قطع ناقص کا مرکز ج ہے اور اسکے محیط پر کے ایک نقطہ ح کا خارج المرکز زاویہ ط ہے۔ ج ق ناقص کا ایک نیم قطر ہے جو ح پر کے ماس کے متوازی ہے۔
ثابت کر دو کہ عددی لحاظ سے

$$\text{س} = (\text{اوجب ط} + \text{ب}^2 \text{جم ط}) / \frac{۲}{۳} \text{اب} = \frac{\text{جق}^2}{\text{اب}}$$

یہ ثابت ہو سکتا ہے کہ ق کا خارج المرکز زاویہ $\text{ط} \pm \frac{\pi}{۲}$ ہے۔
 ج ح جق کو مزدوج نیم قطر کہتے ہیں کیونکہ ہم باسانی دیکھ سکتے ہیں کہ ان میں سے

ما = ج لوک قط (ج) کے لئے مس = ج قط (ج)

۱۰۔ دفعہ ۳۳ مثال ۲ میں جو عام نتائج مرتب کئے گئے ہیں ذیل کی خاص صورتوں میں ان کی تصدیق کرو

(۱) اٹیرن کی شکل کا منحنی $r^2 = \text{اجم } ۲ \text{ طما}^2$ ، $r^2 = \text{اع}^2$ ، $r^2 = \text{مس}^2$

(۲) قائم زائد $r^2 = \text{اجم } ۲ \text{ طما}^2$ ، $r^2 = \text{اع}^2$ ، $r^2 = \text{مس}^2$

(۳) مکافی $r^2 = \text{اجم } ۲ \text{ طما}^2$ ، $r^2 = \text{اع}^2$ ، $r^2 = \text{مس}^2$

(۴) خط صنوبری $r^2 = \text{اجم } ۲ \text{ طما}^2$ ، $r^2 = \text{اع}^2$ ، $r^2 = \text{مس}^2$

مکافی کے لئے $m = \frac{1}{2}$ ، صنوبری کے لئے $m = \frac{1}{3}$ اور $\frac{1}{4}$ کی بجائے۔

۱۱۔ ثابت کرو کہ مبداء میں سے گزرنیوالا وتر انحناء ۲ $\frac{r^2}{\text{فرع}}$ ہے

منحنی $r^2 = \text{اجم } ۲ \text{ طما}^2$ کے لئے یہ وتر $\frac{r^2}{1+m^2}$ ہے۔

۱۲۔ ثابت کرو کہ مساوی الزاویہ لولبی $r = \text{اجم } ۲ \text{ طما}^2$ مساوی صورت میں نیم قطر انحناء رقم $\frac{r^2}{2}$ ہے، نیز نیم قطر انحناء کے سامنے مبداء پر زاویہ قائمہ بنتا ہے۔

۱۳۔ اگر ایک مخروطی تراش میں ماسکی نیم قطر اور n پر کے ماس کے درمیان زاویہ θ ہو اور ماسکی نیم قطر اور عماد کا درمیانی زاویہ ϕ ہو تو ضابطہ (ع) کی مدد سے ثابت کرو کہ

مس = جب $\frac{r^2}{\text{اجم } ۲ \text{ طما}^2}$ جہاں مخروطی کی مسادات ہے
 $ل = ۱ + \text{اجم } ۲ \text{ طما}^2$

اگر راء ماسکی فاصلے میں تو ثابت کر دو کہ

$$وزجم حما = حبا = اول$$

$$اور ص = \frac{(وزر) \frac{1}{2}}{وب} = \frac{وزجم حما}{وب}$$

۱۴۔ ذہنوں سے مراد تفرق لمحاظ س کے ہے۔ اگر مرکز انحناء کے محاذ (ضام) ہوں تو مساواتوں جم فم = لا، جب فم = ما کو تفرق کرنے سے ثابت کر دو کہ

$$\frac{1}{ص} = \frac{لا}{فا} = \frac{1}{ص} = \frac{1}{(لا) + (ما)}$$

$$اور ضا = لا + ص = لا + حبا = ما + ص = ما$$

۱۵۔ ضابطہ (ع) سے ثابت کر دو کہ نقطہ انعطاف کے لئے شرط ہے

$$ح + \frac{وزع}{رطما} = ۰$$

۱۶۔ دائرہ (لا - حما) + (ما - ببا) = د اور منحنی ما = ف (لا)

ایک دوسرے کو نقطہ ص (ا، ب) قطع کرتے ہیں، اگر نقطہ ص پر عفا ما اور عفا ما کی قیمتیں دائرہ اور منحنی دونوں کے لئے ایک ہی ہوں تو ثابت کر دو کہ دائرہ نقطہ ص پر منحنی کا دائرہ انحناء ہے۔

نقطہ ص پر دائرہ اور منحنی دونوں کا ماس ایک ہی ہے کیونکہ ص دائرہ اور منحنی دونوں پر واقع ہے اور دائرہ کا دھال نقطہ ص پر مساوی ہے منحنی کے دھال کے اسی نقطہ پر۔ دائرہ کی مساوات کو دوم تہ تفرق کر دو اور تفرق کے بعد

لا، ما، عفا ما، عفا ما کی بجائے بالترتیب ا، ب، ف (ا)، ف (ا) ص (ا) رکھو۔ اس طرح حاصل ہوگا

$$(۱) - (حما + (ب - ببا) = د \dots \dots \dots (۱)$$

$$(۲) - (حما + (ب - ببا) = ف (ا) \dots \dots \dots (۲)$$

$$(۳) - [ف (ا)] + (ب - ببا) = ف (ا) \dots \dots \dots (۳)$$

(۲) اور (۳) سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{ب۔ ب} = - [+ \{ \text{ف} (۱) \}] \div \text{ف} (۱)$$

$$\text{و۔ ع} = \text{ف} (۱) [+ \{ \text{ف} (۱) \}] \div \text{ف} (۱)$$

یہ قیمتیں (۱) میں مندرج کرنے سے

$$\text{د} = - [+ \{ \text{ف} (۱) \}] \div \text{ف} (۱) \dots \dots \dots (۴)$$

لیکن (۴) سے جو د کی قیمت حاصل ہوتی ہے وہ نقطہ ف پر نیم قطر انحناء ہے اور (ع، ب) نقطہ ف پر کے مرکز انحناء کے متحد ہیں۔

تعریف۔ دو منحنی ف = ف (۱) اور ف = ف (۱) جو ایک دوسرے کو نقطہ ف (۱) پر قطع کریں وہ ف (۱) پر ایک دوسرے کے ساتھ ف (۱) میں رتبہ کا تماس رکھتے ہیں اگر ف (۱) = ف (۱) ف (۱) = ف (۱)۔

$$\text{ف} (۱) = \text{ف} (۱) \text{ لیکن ف} (۱) \text{ مساوی نہ ہو ف} (۱) \text{ کے}$$

اس لحاظ سے دائرہ انحناء اصلی منحنی کے ساتھ دوسرے رتبہ کا تماس رکھتا ہے۔

ٹیلیس کے مسئلہ (دفعہ ۴۳) سے معلوم ہوگا کہ جب دو منحنی ایک دوسرے کے ساتھ نقطہ ف (۱) پر تواس رتبہ کا تماس رکھیں تو (۱) ب کے نزدیک متناظر معینوں کا فرق ف (۱) - ف (۱) (۱) + ۱) دیں رتبہ کا صفاریہ ہوگا جبکہ لا - ۱ کو صدر صفاریہ خیال کیا جائے۔ کیونکہ

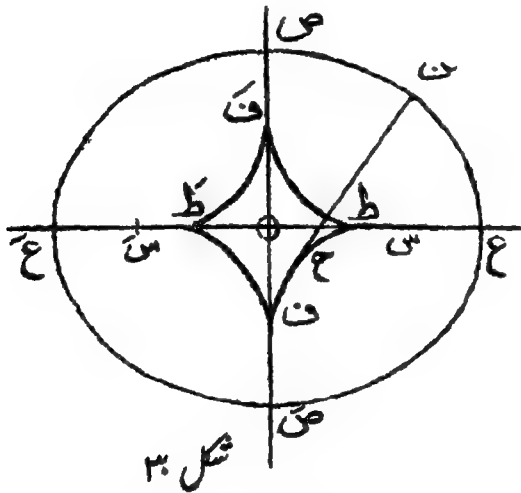
$$\text{ف} (۱) - \text{ف} (۱) = \frac{(۱ - ۱) + ۱}{(۱ + ۱)} \{ \text{ف} (۱) - \text{ف} (۱) + \text{ب} \}$$

جہاں ب صفر ہوتا ہے جبکہ لا = ۱۔
۴۴۔ برہیجہ درہیجہ، مشوار می منحنی۔
تعریف۔ کسی منحنی کے مرکز انحناء کے طریق کو ہم اس منحنی کا برہیجہ کہینگے۔

منہجی کے کسی نقطہ (علا، ما) کے جواب میں جو مرکز اختلا ح ہے اس کے محدود (ضما، عا) ذیل کی مساواتوں سے حاصل ہوتے ہیں

ضاً = لا۔ مس جب فضا، عا = ما + مس جزم فضا..... (۱)
 چاروں مقداریں لا، ما، فضا، مس ایک ہی مقدار لایا یا س یا ت کی رقوم
 میں بیان ہو سکتی ہیں۔ اگر اس مقدار کو مساواتوں (۱) سے سافط کیا جائے تو ضا، عا
 میں ربط لیکھا جو محسنی کے پرہیز کی مساوات ہوگی۔

ناقص کے پیمائش کی مساوات $(\text{لا})^{\frac{2}{3}} + (\text{پ ما})^{\frac{2}{3}} = (\text{ا} - \text{ب})^{\frac{2}{3}}$
 پہلے معلوم کی گئی ہے (ملاحظہ ہو دفعہ ۳۳ شمال ۳) اور اس کی ترسیم شکل ۳۳
 میں پیش کی گئی ہے۔



نقص کے راسوں ع، ع، ص، ص کے جواب میں انخما کے مرکز ط، ط، ف، ف ہیں اور ع ط = ع ط = ب، ف ص = ص ف = پ

یہ واضح ہے کہ نصف قطر انخما کو منحنی کے مرکز کرنے میں کس طرح استعمال کر سکتے ہیں۔

ذیل میں برہمچہ کی مشہور خاصیتیں مندرج ہیں۔

- (۱) مفروضہ منحنی کے نقطہ δ پر کا عماد برہمچہ کے نقطہ δ پر ماس ہے۔
 (۲) برہمچہ کی کسی قوس کا طول اصلی منحنی میں اٹھنا کے ان نیم نظروں کے فرق کے مساوی ہوتا ہے جو قوس کے سروں کے متناظر نقطوں پر کھینچے جائیں۔

(۱) مساواتوں (۱) میں s کو جو مفروضہ منحنی کی قوس کا طول ہے متغیر متبوع مانو،

$$\frac{\text{فرضا}}{\text{فرس}} = \frac{\text{مرلا}}{\text{فرس}} - \text{مجم فدا} \frac{\text{مرفا}}{\text{فرس}} - \text{جب فدا} \frac{\text{مرکا}}{\text{فرس}}$$

$$= - \text{جب فدا} \frac{\text{مرکا}}{\text{فرس}} \dots \dots \dots (۲)$$

$$\text{کیونکہ} \frac{\text{مرلا}}{\text{فرس}} = \text{مجم فدا} \frac{1}{\text{مر}} = \frac{\text{مرفا}}{\text{فرس}}$$

$$\text{اسی طرح سے} \frac{\text{مرعا}}{\text{فرس}} = \text{مجم فدا} \frac{\text{مرکا}}{\text{فرس}} \dots \dots \dots (۳)$$

$$\text{اس لئے} \frac{\text{مرعا}}{\text{فرضا}} = \frac{\text{مرکا}}{\text{فرس}} = - \text{مجم فدا} \frac{\text{مرکا}}{\text{فرس}}$$

اب مرکز انصاح (ضبا، عا) δ پر کے عماد پر واقع ہے اور برہمچہ کا ڈھال

نقطہ δ پر $\frac{\text{مرعا}}{\text{فرضا}}$ یعنی - مم فدا ہے۔ لیکن مفروضہ منحنی کے نقطہ δ

جو عماد ہے اس کا ڈھال - مم فدا ہے۔ اسلئے عماد δ δ پر برہمچہ کے ماس پر منطبق ہوتا ہے۔

(۲) فرض کردہ کہ فرت ما برہمچہ کی قوس کا تفرقہ ہے، (۲) اور (۳) یہ

$$\text{فرضا} = - \text{جب فدا} \frac{\text{مرکا}}{\text{فرس}} = \text{مرعا} = \text{مجم فدا} \frac{\text{مرکا}}{\text{فرس}}$$

ایک درپوچہ قسم کرے گا۔ پس کسی مفروضہ منحنی کا صرف ایک درپوچہ ہوتا ہے لیکن اسکے بیشمار درپوچے ہوتے ہیں۔
 دو درپوچوں $ح$ ، $ح'$ ، $ح''$ ، $ح'''$ کو متوازی منحنی کہتے ہیں کیونکہ ان کا باہمی عمودی فاصلہ مستقل ہے۔

$$۳۵۔ \text{لفاف مساوات } ح = ح' لا + \frac{۱}{ح} \dots \dots (۱)$$

جہاں $ح$ اور $ح'$ مستقل ہیں ایک خط مستقیم کو تعبیر کرتی ہے۔ اگر $ح$ کو کوئی مختلف مستقل قیمت مثلاً $ح'$ دی جائے تو مساوات ہو جاتی ہے

$$ح = ح' لا + \frac{۱}{ح'} \dots \dots (۲)$$

اور یہ ایک مختلف خط مستقیم کو تعبیر کرتی ہے۔
 (۱) اور (۲) کے نقطہ تقاطع کے محدود ہیں

$$لا = \frac{۱}{ح' ح} ، ح = ح' لا + \frac{۱}{ح} \dots \dots (۳)$$

اب فرض کرو کہ $ح$ بالیحا قیمت $ح'$ کے قریب آتا جاتا ہے، اس کا نتیجہ یہ ہوگا کہ خط (۲) خط (۱) کے قریب آتا جائیگا لیکن مساواتوں (۳) سے ظاہر ہے کہ جب $ح$ انتہائی مائل بہ $ح'$ ہو تو نقطہ تقاطع انتہائی صورت میں ایک محدود مقام کی طرف مائل ہوتا ہے جس کے محدود

$$لا = \frac{۱}{ح' ح} ، ح = \frac{۵۲}{ح'} \dots \dots (۴)$$

ہیں۔ اگر ہم مساواتوں (۴) سے $ح$ کو ساقط کر دیں تو مساوات

$$ح = \frac{۱}{لا} \dots \dots (۵)$$

مائل ہوتی ہے۔ اس سے معلوم ہوتا ہے کہ $ح$ خواہ کوئی قیمت اختیار کرے انتہائی نقطہ تقاطع مکانی (۵) پر واقع ہوتا ہے نیز اسکی باسانی تصدیق ہو سکتی ہے کہ $ح$ کی خواہ کچھ ہی قیمت ہو خط (۱) مکانی کا مماس ہے۔

بالعموم کسی منحنی کی مساطت ف (لا' کا) = میں ایسے مستقل شامل ہوتے ہیں جو منحنی کی شکل، ناپ اور مقام کا تعین کرتے ہیں، ان مستقلوں کو سلسلہ وار مختلف قیمتیں دینے سے مختلف منحنیات کا ایک سلسلہ حاصل ہوتا ہے، لیکن اس جگہ ہم صرف اس صورت پر غور کریں گے جس میں ایک مستقل کو مختلف قیمتیں دینے سے منحنیات کا سلسلہ حاصل ہو۔ اس سلسلہ کو ہم قبیل منحنیات کہیں گے۔ ایسی صورت میں مستقل کو قبیل کا متبذل کہتے ہیں، مثلاً (۱) میں عدا خطوط مستقیم کے قبیل کا متبذل ہے۔ کسی قبیل کے کوئی دو منحنی بالعموم ایک دوسرے کو قطع کریں گے، اگر قبیل کے دو منحنیات عدا اور ص کے لئے متبذل کی قیمتیں عدا اور عدا + صف عدا ہوں تو ان کا نقطہ یا نقاط تقاطع محدود انتہائی مقام اختیار کریں گے جبکہ صف عدا مائل بہ صفر ہو۔ ان انتہائی مقامات کے طریق کو قبیل منحنیات کا لاف کہتے ہیں۔ مثلاً مکانی (۵) قبیل (۱) کا لاف ہے، کسی منحنی کا بریچہ ایسے خطوط مستقیم کے قبیل کا لاف ہے جو منحنی کے عماد ہوں۔ (دفعات ۲۲، ۳۴)

۳۶۔ لغاف کی مساوات۔ فرض کرو کہ مساوات

ف (لا، ما، عہ) = (۱)
ایک قبیل منحنیات کو تعبیر کرتی ہے اور قبیل کا متبادل تفاعلی علامت میں جدا لگانا
دکھایا گیا ہے، نظام کے کسی ایک متغی کے لئے علامت مستقل ہے
فرض کر کہ مساوات

نظام کے ایک اور نمونی کو تبصیر کرتی ہے۔ (۱) اور (۲) کے نقاط تقاطع کے محدد نمونی { ف (لا' ما' عا + صف عا) - ف (لا' ما' عا) } / صف عا = (۳).....

کیونکہ اس کی

۸۵ - منہ ۱۶۵

جف ف (لا، ما، عما)

(۴) = جف عما

ہے، اسلئے لفاف پر کے نقاط کے محدود مساواتوں (۱) اور (۴) کو پورا کرتے ہیں اور لفاف کی مساوات ان دو مساواتوں سے عما کو ساقط کرنے سے حاصل ہوتی ہے۔ اور کے ثبوت سے ظاہر ہے کہ (۴) کے مرتب کرنے میں لا اور ما دونوں کو مستقل قرار دیا گیا ہے۔

مثلاً اگر ف (لا، ما، عما) = - ما + عما لا + $\frac{1}{عما}$ جف ف (لا، ما، عما) = $\frac{1}{عما} - لا$ مساواتوں - ما + عما لا + $\frac{1}{عما} = 0$ اور لا - $\frac{1}{عما} = 0$

سے عما کو ساقط کرنے سے حاصل ہوتا ہے ما = لا پس لفاف سکافی ہے جیسا کہ دفعہ ۳۵ میں ما حل کیا گیا۔

دفعہ ۳۵ میں ہم نے دیکھا کہ قبیل (۱) کا ہر ایک رکن سکافی (۵) کا ما س ہے۔ اب ہم ذیل کا مسئلہ ثابت کریں گے۔

مسئلہ - بالعموم کسی قبیل منحنیات کا لفاف قبیل کے ہر ایک رکن کو مس کرتا ہے۔ (۱) کے نقطہ (لا، ما) پر جو حال ذیل کی مساوات سے ما حل ہوتا ہے

جف ف + جف ف = جف ف فرما (۵)

جہاں عمل تفرق میں عما کو مستقل رکھنا چاہئے
 بخلاف اس کے لفاف کی مساوات حاصل کرنے میں عما کو (۱) اور (۴) میں ساقط کیا جاتا ہے۔ اس لئے (۱) کو لفاف کی مساوات مانا جاسکتا ہے بشرطیکہ عما کو لا، ما کا ایک ایسا تفاعل قرار دیا جائے جس کا نتیجہ (۴) سے ہوتا ہے۔ پس لفاف کے کسی نقطہ

(لا، ما) پر کاؤ حال (۱) کا پورا مشتق لینے سے حاصل ہوگا پورا مشتق ذیل کی مساوات سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{جف ف}}{\text{جف لا}} + \frac{\text{جف ف}}{\text{جف ما}} + \frac{\text{جف ف}}{\text{جف و}} = \dots (۶)$$

اب فرض کرو کہ نقطہ (لا، ما) کے محدود (۱) اور (۳) دونوں کو پورا کرتے ہیں، اس طرح یہ نقطہ منحنی (۱) اور لفاف دونوں پر واقع ہوگا۔ نیز (۴) مکی اردو سے مساوات (۶) مساوات (۵) میں تخیل ہو جاتی ہے۔ پس معلوم ہوا کہ نقطہ (لا، ما) پر ڈھال

فرما منحنی (۱) اور لفاف دونوں کے لئے وہی ہے۔ مسئلہ ثابت ہوا۔

یہ تسلیم کر لیا گیا ہے کہ $\frac{\text{جف ف}}{\text{جف لا}}$ ، $\frac{\text{جف ف}}{\text{جف ما}}$ دونوں صفر نہیں ہیں۔

اگر یہ صفر ہوں تو فرما کی قیمت جو (۵) یا (۶) سے حاصل ہوتی ہے غیر معین ہوگی، اس صورت میں ممکن ہے کہ مسئلہ درست نہ ہو، مگر ایسی صورتوں کی بحث اس کتاب کی حدود سے باہر ہے۔

تخلیلی نقطہ نظر سے قبیل (۱) کے لفاف معلوم کرنے کا عمل وہی ہے جو تغیر $\frac{\text{لا، ما}}{\text{جف ف}}$ کے تقابل $\frac{\text{لا، ما}}{\text{جف ف}}$ کے موڑ کی قیمتیں معلوم کرنے کا عمل ہے، جبکہ $\frac{\text{لا، ما}}{\text{جف ف}}$ کو مستقل مانا جائے۔

طالب علم $\frac{\text{لا، ما}}{\text{جف ف}}$ کی مثبت اور منفی قیمتوں کے لئے قبیل $\frac{\text{لا، ما}}{\text{جف ف}} = \frac{1}{\text{جف ف}}$ کے چند خطوط کھینچے، اس طرح اسے ایک ایسے منحنی کا اچھا اندازہ ہو جائیگا جو اپنے ماسوں کا لفاف ہے۔ یہ خط باسانی کھینچ سکتے ہیں کیونکہ ان کے ماسوں کے محور پر بالترتیب

$$\frac{1}{\text{جف ف}}، \frac{1}{\text{جف ف}}$$

مثال ۱۔ مکانی ما = ۴ لا کا پیچہ مکانی کے عمادوں کا لفاف خیال کیا جاسکتا ہے۔

(ھ، گ) پر کا عدا ہے

۱۲ (گ-گ) + (گ-لا-ھ) =

یا ۸ کا ۱۰ (لا-۱۲) گ-گ = (۱)

کیونکہ مکافی کی مساوات سے ھ = $\frac{ک}{۱۲}$

گ کو غلط مستقیم (۱) کے فیصلے یا متبدل مانکر اس کے لفاف کی مساوات دریا
(۱) کو بلحاظ گ کے تفرق کرو اس طرح حاصل ہوگا

۴ (۱۰-۱۲) گ-گ = (۲)
(۱) کے درمیان گ کو ساقط کرنے سے حاصل ہوتا ہے
۱۰ کا ۱۲ (لا-۱۲) گ

جو پہلے کی مساوات سے ہے۔

مثال :- اس درجہ کے لفاف معلوم کرو جو مبداء میں سے گزرتے ہیں اور جن کے
مرکز زائد لا۱۰ کا ہے۔ واقعہ ہوتے ہیں۔

فرض کرو کہ فیصلے کے کسی دائرہ کا مرکز (ع) ہے اور یہ کی مساوات ہے

لا۱۰ + وا۲ = ع۲ لا۱۰ + ع۲ = (۱)
مساوات مستقل رقم نہیں ہے کیونکہ دائرہ مبداء میں سے گزرتا ہے۔

چونکہ مرکز زائد پر واقع ہیں اس لئے

ع۲ = ع۲ = ج۲ (۲)

پھر ان کے تحت میں کہ مساوات (۱) کے ع۲ کے لئے ع۲ کی رقم تبدیل کیا گیا
ہے اس لئے نسبت کو (۱) میں درج کر دیا گیا ہے۔ اس سے معلوم ہوتا ہے کہ مساوات

(۱) میں اصل ایک متبدل ہے لیکن اس میں زیادہ ہوت ہے کہ ع۲ کو ع۲ کا
ایک ایسا لفاف سمجھ کر جس کو فیصلے (۲) سے ہوتی ہے مساواتوں کو لحاظ رکھ کر

تفرق کیا جائے پھر ع۲ = ج۲ اور $\frac{ج۲}{ع۲}$ کو ساقط کر جائے۔

(۱) اور (۲) کو بلحاظ ع۲ کے تفرق کرنے سے

$$(۳) \dots\dots\dots = \frac{\text{فرع با}}{\text{فرع با}} = \text{ع' - با} = \text{فرع با} = \frac{\text{فرع با}}{\text{فرع با}}$$

$$(۳) \text{ سے } \frac{\text{ع}}{\text{لا}} = \frac{\text{ع}}{\text{لا}}$$

اس لئے (۲) سے $\frac{\text{ع}}{\text{لا}} = \frac{\text{ع}}{\text{لا}} = \frac{\text{ع}}{\text{لا}}$

(۱) میں ع' اور با کے لئے سند ج' کو تبدیل سے حاصل ہوتا ہے

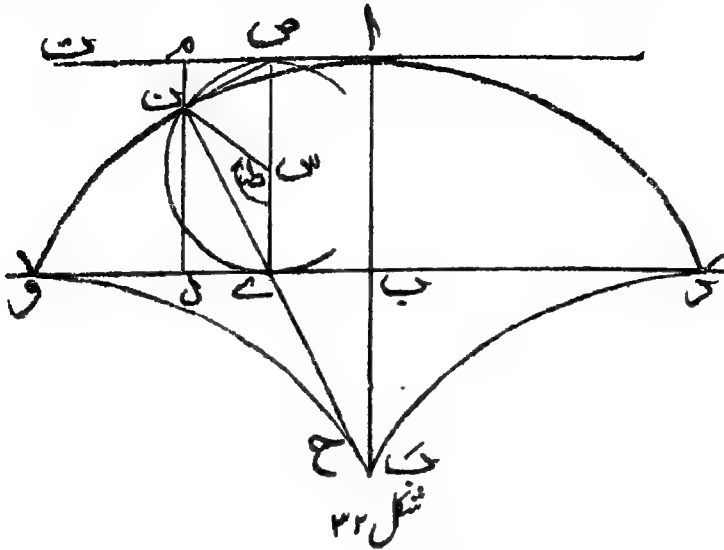
$$(\text{لا} + \text{ع}') = \text{ع}' = \text{ع}' (\text{لا} - \text{ع}') = \text{ع}'$$

جو اینٹوں کی شکل کے نغنی کی سادات ہے۔
 ظاہر ہے کہ اگر کا عمل وہی ہے جو اعظم و اقل قیمتیں معلوم کر لینا عمل ہے۔
 یہ خط تدویر علم حرکت میں کچھ اہمیت رکھتا ہے ہم اجمالی طور پر اسکی مشہور
 ناصیحتوں پر غور کریں گے۔
 تعریف جب ایک دائرہ ایک ثابت خط مستقیم پر گرکتا ہے (بغیر پھسلنے کے) تو
 اس کے محیط پر کانٹوں کی آٹھ ایک مستوی نغنی مرتب کرتا ہے جسے ہم خط تدویر کہیں گے۔
 شکل ۱ میں فرض کر دے کہ اس قاعدہ ہے 'ن' مکوں دائرہ
 ص' کے پر مرکز نقطہ ہے اور ط' نصف قطر اس کے
 اور نصف قطر اس کے کے درمیان کا زاویہ ہے جہاں سے دائرہ
 کا قاعدہ کے ساتھ نقطہ تماس ہے۔
 فرض کرو کہ 'ن' وہی ہوتا ہے جبکہ دائرہ لڑکنا شروع کرتا ہے
 شکل ۱ میں پر عمود یعنی اور فرض کر دے کہ 'ن' = 'لا' = 'ع' =
 تب اگر نصف قطر ہو تو

$$\text{ن} = \text{ع} = \text{قوس ن} = \text{ط}$$

$$\text{لا} = \text{ع} = \text{ن} = \text{ج} = \text{ط} = \text{لا} = \text{ج} = \text{ط}$$

$$\text{ع} = \text{ن} = \text{ج} = \text{ط} = \text{ع} = \text{ن} = \text{ج} = \text{ط}$$



جہاں سے $س$ سے $ص$ نقطہ سے میں سے گزرنیوالا قطر ہے، (۱) خط تدویر کی مساواتیں ہیں۔

اگر $طما = \pi$ تو $لا = \pi$ اور $ب = و$ اور $ن$ اسوقت نقطہ $ا$ پر ہوتا ہے اور اس حالت میں اس کا فاصلہ قاعدہ سے زیادہ سے زیادہ ہے، (۲) کو اس کہتے ہیں۔
 اسوقت $طما = \pi$ تو $لا = \pi$ اور $ب = و$ اس وقت $ن$ کہتے ہیں ہوتا ہے۔

محراب $و$ اس $ب$ کے گرد متشکل ہے $ب$ کو محور کہتے ہیں۔
 اگر دائرہ اور $ا$ کے رے تو $ن$ سلسلہ وار کئی محراب مرتب کر دیا جو $و$ اس کے متماثل ہونگے۔ جب خط تدویر کا ذکر کیا جائے تو بالعموم اس کے ایک محراب سے مراد ہوتی ہے۔ (۳) اس صورت میں $ا$ اس $ب$ اور $ب$ کو محور۔
 خاصیتیں ذیل کے خواص باسانی ثابت ہو سکتے ہیں۔

$$(۱) \text{ مس فضا } = \text{ ع } = \frac{\pi}{۲} \text{ م } = \frac{\pi}{۲} \text{ مس } = \left(\frac{\pi}{۲} - \frac{\pi}{۲} \right) \text{ مس } = \text{ مس } = \text{ ص}$$

$$\text{اس کے فضا} = \frac{\pi}{۲} - \frac{\pi}{۲} = \frac{\pi}{۲} = \text{ ص}$$

جس سے معلوم ہوتا ہے کہ حق صی ماس ہے اور نئے نقطہ حق پر کتنا دبا ہے۔

(۲) س = توس و بن = ۱۴ (۱- جم طین) توس و ا = ۱۴

(۳) $\sqrt{3} = \text{ن} = \text{ح} = ۴ = \text{ج} = \frac{۷}{۴} = \text{ن} = ۲$ (تقداداً)
[اگر ماس (ت) اور عواد (ب) کو حور مانا جائے اور ح (م) (ت) پر عمو دیکھنا
جائے تو رکھو طے = ص (س) ن = ۲۲ - طے -

اس صورت میں

لا = (م = د) (طبا + جب طبا) کا = مرن = د (ا - جم طبا) (ا)

(۱۲) س = قوس الف = ۴ واجب طے س = ۸ × ۸ = ۶۴

مرکز انجمن کے محدود ہیں

ضام = ۱ + ۲ وجب $\frac{\text{طه}}{۲}$ جم $\frac{\text{طه}}{۲}$ = ۱ (طه + جیب طه)

عاب۔۔۔ ح جب $\frac{ط}{۲} = ۱$ (۱۔۱۔حم ط)

مساداتوں (۱) کے ساتھ مقابلہ کرنے سے ظاہر ہے کہ خط تدریس (۱) کا زیادہ
ایک مسادی تدریس جو دو نصفوں (۱) و (۲) کے ساتھ ہے۔ (۱) میں موصوفات
کی مثبت سمت نیچے کی طرف ہے اور جب (۲) میں ہو تو مثبت سمت اوپر کی طرف
ہے پس اس لئے حائقی ہے۔

جس بڑی سچے پر ایک قرن ہے، اور اس اصلی تدویر کے قرن اور بریچے کے

برآمد و برآمد و برآمد جب ایک دائرہ ایک ثابت دائرہ کے محیط پر لگتا ہو (بغیر بیسنے کے) تو اول الذکر کے محیط پر کا کوئی نقطہ جو منحنی مرقسم کرتا ہے اسے ہم برآمد کہتے اگر تحریک دائرہ ثابت دائرہ کے باہر ہو اور درتدویر کہیں گے اگر یہ دائرہ اندر ہو۔

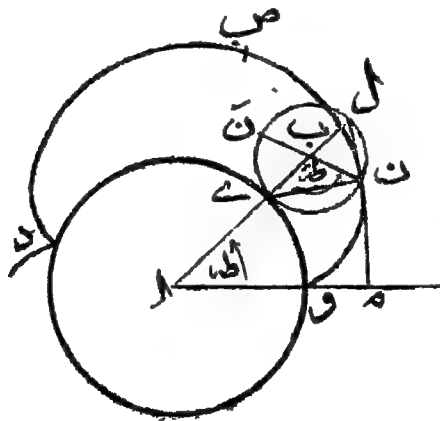
جب لڑکنے والا دائرہ ثابت دائرہ کے گرد پورا حائط ہو تو بر تدویر کو حول تدویر کہا جاسکتا ہے۔

شکل ۳۳ میں بر تدویر کی تکوین دکھائی گئی ہے، نقطہ ح مرسم نقطہ ہے اور نقطہ ابتدائی ہے۔ فرض کرو کہ ثابت اور لڑکنے والے دائروں کے نصف قطر بالترتیب $ل$ ، $ب$ ہیں، زاویہ $و$ $ا$ ۔ $ے$ = $ط$ اور زاویہ $ے$ $ب$ $ن$ = $ط$ ، $ا$ $م$ = $لا$ ، $و$ $ن$ = $ما$ ، $ا$ $ب$ = $ت$ ۔

قوس $ح$ $ے$ = قوس $و$ $ے$ یعنی $ب$ $ط$ = $ا$ $ط$
 $لا$ = $(ا + ب)$ جم $ط$ ۔ $ب$ جم $(ط + ط)$

= $(ا + ب)$ جم $ط$ ۔ $ب$ جم $\frac{ا + ب}{ب}$ $ط$

$ما$ = $(ا + ب)$ جب $ط$ ۔ $ب$ جب $\frac{ا + ب}{ب}$ $ط$ (۲)



شکل ۳۳

جب دائرے $ے$ پر کے ماس کے ایک ہی جانب واقع ہوں یعنی دوتہ دیر کے لئے $(ب > ا)$ اور حول تدویر کے لئے $(ب < ا)$ صرف $ب$ کی علامت بدل دینا کافی ہوگا، دوتہ دیر کی مساواتیں اس شکل کی ہوں گی،

لا = (۱-ب) جم ط + ب جم (۱-ب) ط

ما = (۱-ب) جب ط + ب جب (۱-ب) ط (۳)

اگر نسبت ب : لا کوئی متوافق عدد ہو تو دائرہ جب کا مرکز نقطہ ن پھر تالی نقطہ ف پر واپس آئیگا جبکہ متحرک دائرہ ب ثابت دائرہ کے گرد ایک یا زیادہ دفعہ پورا لڑک جائے۔ اگر نسبت ب : لا متبائن ہو تو ن پھر ف پر واپس نہیں آئے گا۔

استداری خط یا استداری۔ اگر مرکز نقطہ ن محیط پر واقع نہ ہو بلکہ ایک نصف قطر پر یا نصف قطر غرض جو پر واقع ہو تو مرتبہ منحنی کو ہم استداری یا بر استداری یا در استداری کہیں گے۔

طالب علم آسانی دیکھ لیگا کہ اگر دائرہ کے مرکز سے ن کے فاصلہ کو نصف قطر کے ساتھ نسبت لیا، ۱ ہو تو مساواتوں (۱) میں جب ط + اور جم ط کو لیا کے ساتھ ضرب دینے سے استداری کی مساواتیں حاصل ہونگی اور مساواتوں (۲) اور (۳) میں دوسری رقم کے سر ب کو لیا کے ساتھ ضرب دینے سے بالترتیب در استداری اور بر استداری خطوط کی مساواتیں حاصل ہونگی۔

مشق ۱۱

۱۔ ثابت کرو کہ مکانی ما = ۴ لا کی صورت میں
 ۳ = ۲ اتم فضا، ضا = ۲ + ۱۳ اتم فضا، عا = ۲ اتم فضا
 پھر برعکس کی مساوات حاصل کرو۔

۲۔ زاہد لا - ۲ ب = ۱ کی صورت میں ثابت کرو کہ

۴ ضا = (۱ + ب) لا، ۳ ب = عا۔ (۱ + ب) ما

اور برہنہ کی مساوات ہے

$$(و لا) \frac{۲}{۳} - (ب ما) \frac{۲}{۳} = (و + ب) \frac{۲}{۳}$$

۳۔ ثابت کرو کہ قائم زائد لا ما = ج کے لئے

$$\text{خا} = \frac{۳}{۲} (و لا) + \frac{۳}{۲} (ما) ، \text{عا} = \frac{۳}{۲} (و لا) + \frac{۳}{۲} (ما)$$

اور برہنہ کی مساوات ہے

$$(و لا + ما) \frac{۲}{۳} - (و لا - ما) \frac{۲}{۳} = (ج ۳) \frac{۲}{۳}$$

۴۔ ثابت کرو کہ منفی لا + ما = و کے لئے (ملاحظہ ہو دفعہ ۳۳، شق ۱)

خا = و جم + ج جم + ج جم = و جم + ج جم + ج جم = و جم + ج جم + ج جم
اور برہنہ کی مساوات ہے

$$(و لا + ما) \frac{۲}{۳} + (و لا - ما) \frac{۲}{۳} = و \frac{۲}{۳}$$

۵۔ ثابت کرو کہ خطوط مستقیم لا + ما = و کے قبل کائنات

(۱) جبکہ و ما = و زائد و لا ما = و ہے

(۲) جبکہ و ما = و مکانی لا ما = و ہے

(۳) جبکہ و ما = و منفی لا + ما = و ہے

متبیل و ما، و ما جن شرائط کے تابع ہیں ان کا ہندی مفہوم بیان کرو۔

۶۔ ثابت کرو کہ ناقصوں لا + ما = و کے قبل کائنات

(۱) جبکہ و ما = و و زائد و لا ما = و ہے

(۲) جبکہ $صا + ببا = اذخی لا + ما + ا = ا$ ہے

متبادل حروف، جہاں شرائط کے تابع ہیں ان کا ہندی منہوم بیان کرو۔

۷۔ ثابت کرو کہ کافی کے دوہرے عینوں کو قطر بان کر جو دائرے کھینچ سکتے ہیں ان کا کافات ایک مساوی نکلاؤ۔

۸۔ اگر تکتا کسی ایک نقطہ کے محدود کے فاعل ہوں اور حد متبادل ہوتو تکتا + ۲ ق $صا + ص =$ کافات

ق - ن کر = ہے۔ اور ن جم ع = ق جب ع = ص کا کافات

۹۔ م کی خواہ چھہ ہی قیمت ہو ثابت کرو کہ خط مستقیم

$$ما = م لا + \{ (م + ب) / (م + ب) \}$$

مخروطی لا + ب م = اکوس کرتا ہے۔

۱۰۔ ایکسٹنرک خط مستقیم ہے دو ثابت نقطوں (ج) اور (ج) سے

اس پر جو عمود کھینچ سکتے ہیں ان کے مربعوں کا (۱) حاصل ضرب (۲) مجموعہ مستقل رہتا ہے۔ ثابت کرو کہ ہر صورت میں کافات ایک مرکز دار مخروطی تراش ہے۔

۱۱۔ ثابت کرو کہ ناقص کے مرکزی نصف قطروں کو قطر بان کر جو دائرے بنائے جاسکتے

ہیں ان کا کافات $(لا + ما) = لا + ب ما$ ہے۔

۱۲۔ ناقصوں $(لا - صا) + (ما - ببا) = \frac{لا}{ب} + \frac{صا}{ب}$ کا کافات جبکہ $صا + ببا$

سادات $\frac{صا}{لا} + \frac{ببا}{ب} = ۱$ کے ذریعہ مربوط ہوں ناقص $\frac{لا}{ب} + \frac{ما}{ب}$

ہے۔ ہندی زبان میں اس مسئلہ کو بیان کرو۔

۱۳۔ ثابت کرو کہ خطوط مستقیم کے قبیل

ولا قطعہ - ب ماقم عہ = ا - ب

کافانہ نخی (لا) + (ب ماقم) = (ا - ب) ہے۔

۱۴۔ اگر شکل ۲۹ میں و = ع تو ثابت کرو کہ ع کے ماس اور
نما کی مساواتیں ہیں

(۱) لا جب فنا - ماقم فنا = ع

(۲) لا جب فنا + ماقم فنا = فرقا

اور (۲) سے ثابت کرو کہ ع = فرقا

نخی کو اس کے ماسوں کا لفظ تصور کرو۔

۱۵۔ مثال ۱۴ میں جو ترقیم استعمال کی گئی ہے اس کے موافق ثابت کرو کہ مرکز
انحنا کے محدود (ضا، عا) ذیل کی مساواتوں سے معلوم ہوتے ہیں

ضاجم فنا + ماقم فنا = فرقا - ضاجب فنا + ماقم فنا = فرقا

یا ضا = فرقا - جم فنا - فرقا جب فنا = عا - فرقا جب فنا + فرقا جم فنا

۱۶۔ اوپر کی دو مثالوں کی ترقیم کے موافق ثابت کرو کہ و ح کا غل ح
پر جہاں ح مرکز انحنا ہے

- ضاجب فنا + ماقم فنا

ہے اور و = ع - ضاجب فنا + ماقم فنا = ع + فرقا

۱۷۔ ثابت کرو کہ کسی نخی کے برہمچہ کا نصف قطر انحنا و فرقا ہے

جہاں و اصلی نخی کے متناظر نقطہ پر نصف قطر انحنا ہے۔

۲۴۔ شکل ۳۳ میں اگر برتدویر کی توس $و$ من $=$ س تو ثابت کرو کہ
 $\frac{فرس}{قرطہ} = \frac{۲(ب+۱) جب}{۱طہ} ، س = \frac{۲(ب+۱) جب}{۱} - \frac{۱(جم+۱) طہ}{۲(ب+۱)}$
 اور $و$ من کا طول ہے $\frac{۲(ب+۱) جب}{۱}$ ہے۔

۲۵۔ ثابت کرو کہ برتدویر کی ذاتی مساوی ہے $س = \frac{۲(ب+۱) جب}{۱} - \frac{۱(جم+۱) طہ}{۲(ب+۱)}$
 اور نصف قطر انخا ہے $س = \frac{۲(ب+۱) جب}{۲(ب+۱)} - \frac{۱(جم+۱) طہ}{۲(ب+۱)}$
 اسی طرح کے نتائج برتدویر کے لئے بھی درست ہیں اگر $ب$ کی علامت
 بدل دی جائے۔

۲۶۔ اگر $ب = \frac{۱}{۲}$ تو ثابت کرو کہ اس برتدویر کے چار قرن ہیں اور
 اس کی مساواتیں ہیں $لا = ۱(جم+۱) طہ ، ما = ۱(جم+۱) طہ$
 طہ کو ساقط کرنے سے $لا + ما = ۱(جم+۱) طہ$ حاصل ہوتا ہے۔

۲۷۔ اگر $ب = \frac{۱}{۲}$ تو ثابت کرو کہ خط برتدویر ثابت دائرہ کا قطر بن جاتا
 ۲۸۔ اگر $ب = ۱$ اور سدا نقطہ $و$ پر ہو تو ثابت کرو کہ برتدویر خط صنوبری
 $ر = ۲(ب+۱) جب$ بن جاتا ہے۔ یعنی
 $رجم طہ = لا - ۱(جم+۱) طہ = رجب طہ = ما$

۲۹۔ مثال ۲۵ میں رکھو

$$فما = \frac{۲(ب+۱) جب}{۲} + فما ، س = \frac{۲(ب+۱) جب}{۱} + س$$

یعنی توس کو $و$ من کی کے نقطہ وسطی $و$ (رأس) سے ناپنا
 شروع کرو اس طرح حاصل ہوگا

$$س = \frac{۲ب(۱+ب)}{۱+۲ب} \text{ جب } \frac{۱}{۱+۲ب}$$

ثابت کرو کہ مسادات $س = ل$ جب $ل$ فضا ایک برتدویر کو تقبیر کرے گی
اگر $ل$ ایک سے کم ہو اور درتدویر کو اگر $ل$ ایک سے بڑا ہو۔
۳۔ اگر ایک منحنی اور اس کے برہیچہ کی متناظر قوسیں $س$ اور $ل$ ہوں تو

$$ل = ۲ + \frac{فرس}{فرضا} + مستقل$$

مثال ۲۹ کے نتیجہ سے ثابت کرو کہ برتدویر کا برہیچہ ایک برتدویر ہے اور
درتدویر کا درتدویر ہے۔

۳۱۔ ایک دائرہ کے محیط پر متوازی شعاعیں پڑتی ہیں اور منعکس ہوتی
ہیں اور زاویہ انعکاس زاویہ وقوع کے مساوی ہے دائرہ کا نیم قطر $ل$ ہے
اور نقطہ وقوع $(۱+جم ط)$ جب $ط$ ہے محددوں کا بعد دائرہ کا مرکز ہے
اور محور الاست وقوع کے متوازی ہے، ثابت کرو کہ شعاع منعکس
کی مسادات ہے

$$ماجم ۲ ط - لاجب ۲ ط + لاجب ط = .$$

اور شعاع منعکس کا لاف ذیل کی برتدویر ہے

$$لا = \frac{۱}{۳} - (جم ط - جم ۳ ط) ما = \frac{۱}{۳} - (جم ط - جم ۳ ط)$$

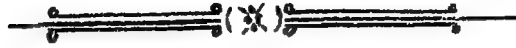
۳۲۔ اگر ایک ذرہ مرکزی مدار ایک ایسی قوت $ق$ کے ماتحت ترسم کرے
جو سمتی نیم قطر کی سمت میں باہر کی طرف عمل کرتی ہو تو مستعملہ ترقیم کے مطابق

$$و = \frac{ھ}{ع} \text{ جہاں } و \text{ رفتار ہے اور } ع \text{ عمود کا طول۔}$$

ثابت کرو کہ

$$ق = فر (و) = ھ ع' (و) = ھ ع' (ع + \frac{ق ع}{فر ط}) \text{ جہاں } ع = \frac{۱}{ر}$$

یہ مساوات مدار کی تفرقی مساوات ہے۔ اگر $Q = \pm \text{صعہ}^{\circ}$ تو ثابت کرو کہ مدار ایک مخروطی ہے جہاں قوت کا مرکز اس کے ایک ماسک پر ہے۔
(ملاحظہ ہوں دفعات ۶۰، ۶۱)



باب پنجم

لاستناہی سلسلے

۳۸۔ لاستناہی سلسلے۔ لاستناہی سلسلوں کی مکمل بحث کے لئے علامہ کرسٹل کے خبر و مقابلہ حصہ دوم کے متعلقہ ابواب کا مطالعہ کرے، انکے متعلق نہایت عمدہ ابتدائی بیان اوسنگھ کی کتاب ”لاستناہی سلسلوں کی تہہ“ (انٹروڈکشن تو انفنٹ سیریز، کبیرج، صوبجات متحدہ امریکہ ہارورڈ یونیورسٹی) میں ملے گا۔ یہاں ہم اپنی توجہ صرف ان مسائل تک محدود رکھینگے جن کو انٹروڈکشن استعمال کرنے کی ضرورت ہوگی۔

لاستناہی سلسلے کی تعریف۔ فرض کر دو کہ E_1, E_2, E_3, \dots متاویز ایک جہیت ہے جو قواعد میں لانتہا ہے، اور E_1 عدد n کا ایک دھیمیت تقابل ہے، نیز فرض کر دو کہ E_1 پہلی n نمبروں کے مجموعہ کو تغیر کرتا ہے، تب

$$E_1 = E_2 + E_3 + \dots + E_n + E_{n+1} \dots \dots \dots (1)$$

اگر n کو لانتہا کر دیا جائے تو سلسلہ (۱) لاستناہی سلسلہ ہو جائیگا۔

اگر n کے لانتہا ٹرہنے سے مجموعہ E_1 ایک معین محدود انتہا E_1 کی طرف مائل ہو تو لاستناہی سلسلہ کو مستحق کہتے ہیں اور اس امر کو کئی طرح سے بیان کرتے ہیں، سلسلہ کا مجموعہ E_1 ہے سلسلہ کی قیمت E_1 ہے سلسلہ قیمت E_1 کی طرف مستحق ہوتا ہے۔

مثال ۱۔ فرض کر دو کہ $E_1 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} + \dots$

ب-ج > ۱ > ب+ج، ۱-ج > ب > ۱+ج
 ۳۹- انتہا کا وجود کسی تفاعل کا تعین ایک لامتناہی سلسلہ سے
 ہو سکتا ہے بشرطیکہ سلسلہ مستقر ہو، مثلاً لامتناہی سلسلہ
 $1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \dots$

قیمت $\frac{1}{1-1}$ کی طرف مستقر ہوتا ہے جب تک کہ لا تعداد ایک سے
 کم رہے۔ اس صورت میں ہم کہہ سکتے ہیں کہ اگر $1 > 1 > 1$ تو تفاعل
 $\frac{1}{1-1}$ اس لامتناہی سلسلہ سے تعبیر ہوتا ہے یا سلسلہ تفاعل کا تعین
 کرتا ہے۔ اگر لا ایک سے بڑا ہو تو سلسلہ متشعب ہوتا ہے اور یہ تفاعل
 $\frac{1}{1-1}$ کو مطلق تعبیر نہیں کر سکتا۔ عملی نقطہ نظر سے صرف مستقر سلسلے
 زیادہ تر کارآمد ہوتے ہیں، سوائے بعض قیود کے ان پر اُسی آسانی سے
 ریاضی اعمال صادر ہو سکتے ہیں جو محدود رتوں والے جملات پر، غیر مستقر
 سلسلے صرف خاص خاص حالات کے ماتحت استعمال میں آتے ہیں۔
 جب ایک سلسلہ دیا گیا ہو تو سلسلہ ہندسیہ کی طرح اس عدد کی
 فوراً تخصیص کر لینا جو اس کی انتہا ہو ایسا آسان نہیں ہوتا، پس اس امر
 کی تحقیق کے لئے کسی خاص صورت میں سلسلہ کی انتہا ہے بھی یا نہیں
 کسی جانچ کا قائم کرنا ضروری ہے، اس غرض سے ہم ذیل کے تین مسائل
 بیان کرتے ہیں جو علاوہ ازیں سلسلوں کے استنتاج کے متعلق چند سادہ
 آزمائشی اصولوں کے مضبوط کرنے میں کارآمد ہوں گے۔ ہم مان لیتے ہیں کہ متغیر
 اس کا ایک قیمت والا تفاعل ہے، اس میں ن کو لا انتہا
 بڑھانا پڑے گا۔ چونکہ تمام انتہاؤں میں ن ∞ ، اس لئے عمل میں
 ہم لاحقہ ن ∞ کو حذف کر دیں گے۔

مسئلہ ۱- اگر میں ن کا ایک ایسا تفاعل ہو جو (۱) ن کے بڑھنے سے

ہمیشہ بڑھے لیکن (۲) ایک محدود مقدار α سے ہمیشہ کم رہے تو α کے لائنٹا بڑھنے سے یہ ایک خاص انتہا کی طرف مستند ہوگا جو α سے کم یا α کے مساوی ہوگی۔

مسئلہ ۲۔ اگر α میں α کا ایک ایسا تفاعل ہو جو (۱) α کے بڑھنے سے ہمیشہ گھٹے لیکن (۲) ایک خاص مقدار β سے ہمیشہ بڑا رہے تو α کے لائنٹا بڑھنے سے یہ ایک خاص مقدار کی طرف مستند ہوگا جو β سے زیادہ یا β کے مساوی ہوگی۔

مسئلہ ۳۔ اس امر کے لئے ضروری اور کافی شرط کہ α کے لائنٹا بڑھنے سے α میں ایک معین انتہا کی طرف مائل ہو یہ ہے کہ α کے لائنٹا بڑھنے سے (س) - (س) کی انتہا α کی ہر ایک قیمت کے لئے

صفر ہو۔ دوسرے الفاظ میں فرض کرو کہ صہ کوئی اختیاری چھوٹی مثبت مقدار ہے۔ اگر α کی ایسی قیمت مثلاً $\alpha = 3$ معلوم ہو سکے کہ جب $\alpha > 3$ تو

فرق (س) - (س) تعداد کم ہو صہ سے α کی تمام مثبت صحیح قیمتوں کے لئے تو α کے استدقاق کے لئے یہ شرط ضروری اور کافی ہوگی۔

ہم ان مسئلوں کے یہاں ثبوت نہیں دینگے، مسئلہ ۱ اور ۲ بطور مشق کے اس سے قبل (مشق، سوال ۱۴، حصہ اول میں) دئے گئے ہیں اور جو ہندسی توضیح ان کی وہاں دی گئی ہے اس کی بنیاد پر ہم ان کی صداقت کو ماننے کے مجاز ہیں۔ مسئلہ ۳ کے متعلق ہم باآسانی دیکھ سکتے ہیں کہ اوپر کی شرط ضروری ہے۔ کیونکہ اگر α میں α کی معین انتہا α ہو تو

$$(\alpha - \alpha) = (\alpha - \alpha) + (\alpha - \alpha)$$

$$\text{اگلے نہا} (\alpha - \alpha) = \text{نہا} (\alpha - \alpha) + \text{نہا} (\alpha - \alpha)$$

اور $\frac{1}{1+n} - \frac{1}{2+n} + \frac{1}{3+n} - \frac{1}{4+n} + \dots = \frac{1}{n+1} - \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right) - \frac{1}{n+4} = \frac{1}{n+1} \pm \dots$
 $> \frac{1}{1+n}$ کیونکہ ہر خطوط وحدانی کے اندر کا جملہ مثبت ہے۔

اگر ف جفت ہو تو آخری خطوط وحدانی میں صرف ایک رقم ہوگی $\frac{1}{n+1}$ ۔

نیز $\frac{1}{1+n} + \frac{1}{2+n} + \frac{1}{3+n} + \dots = \frac{1}{n+1} - \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right) - \frac{1}{n+4}$

$+ \left(\frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+4}\right) + \dots$

بائیں طرف کا جملہ مثبت ہے۔ اسلئے $|س|$ - $|س|$ یا صفر اور $\frac{1}{1+n}$ کے

درمیان واقع ہوتا ہے۔ اسلئے $|س|$ - $|س|$ کی انتہا صفر ہے اور $|س|$ ایک معین انتہا کی طرف مائل ہوتا ہے۔ بعد میں ہم دیکھینگے کہ یہ انتہا لوک ۲ ہے (دفعہ ۴۴ (۵) - پس

لوک ۲ = $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$

ظاہر ہے کہ اگر $|س|$ کی بجائے کوئی لا کا مسلسل تفاعل $f(n)$ ہو تو بھی یہ نتیجوں مسئلے (۱)، (۲)، (۳) اسکی صورت میں درست رہیں گے۔

اگر لا ایک محدود انتہا لا کی طرف مائل ہوتا ہو تو ہم لا کی بجائے $\frac{1}{n} \pm \frac{1}{n}$ رکھ سکتے ہیں، اس طرح n کے لا انتہا بڑھنے سے لا کی انتہا لا ہوگی۔ اگر لا مائل نہ ہو تو ہم لا کی بجائے n رکھ سکتے ہیں۔

۴۰۔ استدقاق پر کھنسنے کے طریقے۔ اگر لا تنہا ہی سلسلے حرج کا

مجموعہ س سے تعمیر کیا جائے اور اس کی ن رقموں کا س سے تو فرق س-س کو باقی کہتے ہیں ن رقموں کے بعد۔
اگر اس باقی کو جی لکھیں تو

$$س = س + ب$$

صریحاً بن خود ایک لائن تہی سلسلہ ہے $6 + 1 + 6 + 2 + 6 + 3 + \dots$

اور ب کی اتہا صفر ہے۔ اگر سلسلہ ایسا ہو کہ ا ب ا ب ا ب
چھوٹا ہو جبکہ ن چھوٹا ہو تو سلسلہ سرعت سے مستحق ہوتا ہے کیونکہ سلسلہ کی سرعت
چند قیمتیں لینے سے س کی قیمت کا اچھا اندازہ لگ سکتا ہے۔ سلسلوں کی قیمتوں
کے مسوب کرنے میں استفاد قاق کی سرعت خاص اہمیت رکھتی ہے، لیکن یاد رہے
کہ ایک سلسلہ مستحق ہی کہلائے گا خواہ اسکی قیمت کا معمولی اندازہ لگانے میں
دس لاکھ رقموں کی ضرورت ہو۔

بنیادی پرکھ یا جانچ۔ فرض کرو کہ ج ب س پ۔ س کو تعبیر کرتا ہے یعنی

$$b_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1}$$

تب ب کون رقموں کے بعد جزوی باقی کہیں گے۔ دفعہ ۳۹ مسئلہ ۳ کی رو سے اس امر کے لئے ضروری اور کافی شرط کہ حج ع مستحق ہو۔ ہے کہ یہاں کی انتہا ف کی ہر قیمت کے لئے صفر ہو۔

اگر ف = اتوب = ع₁₀ ، اس لئے استدقاق کی ایک ضروری شرط یہ ہے کہ ع₁₀ یا (جو وہی بات ہے کہ) ع₁₀ مال بہ صفر ہو، مگر ہم آگے دیکھینگے (مثال ۱) کہ یہ شرط کافی نہیں ہے۔

اس جانچ کو آسانی سے استعمال نہیں کیا جاسکتا، اس لئے ہم ایک دو اور جانچ کے طریقے حاصل کرتے ہیں جو آسانی استعمال میں آسکیں۔
مقابلہ کی جانچ۔ فرض کرو کہ $ع + ۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵ + ۶ + ۷ + ۸ + ۹ + ۱۰$ مثبت رقوم کا ایک سلسلہ ہے۔ اگر اس سلسلہ کی ہر ایک رقم، ایک اور مثبت رقوموں والے مستحق سلسلہ $۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵ + ۶ + ۷ + ۸ + ۹ + ۱۰$ کی متناظر رقم سے کم ہو یا مساوی ہو تو سلسلہ $ع + ۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵ + ۶ + ۷ + ۸ + ۹ + ۱۰$ بھی مستحق ہوگا لیکن اگر اس سلسلہ کی ہر ایک رقم مثبت رقوموں والے ایک متع سلسلہ $ب + ۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵ + ۶ + ۷ + ۸ + ۹ + ۱۰$ کی متناظر رقم کے مساوی ہو یا اس سے بڑی ہو تو سلسلہ $ع + ۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵ + ۶ + ۷ + ۸ + ۹ + ۱۰$ بھی متع ہوگا۔

فرض کرو کہ $س = ح + ع$ ، $ص = ح + ۱$ ، $ص = ہ + ص$

تب $س \geq ص$ ، $ص > ص$ کیونکہ سلسلہ $۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵ + ۶ + ۷ + ۸ + ۹ + ۱۰$ کی سب قیمتیں مثبت ہیں، اس لئے $س$ ، $ج$ و $ن$ کے بڑھنے سے بڑھتا ہے ہمیشہ $ص$ سے کم رہتا ہے یعنی $س$ ایک ایسی انتہا $س$ کی طرف مستحق ہوتا ہے جو $ص$ سے کم ہے یا اس کے مساوی ہے [دفعہ ۳۹ سلسلہ ۱] انتہا کی صورت میں ثبوت طالب علم خود جیسا کرے۔
نوٹ۔ یہاں ایک بات قابل توجہ ہے کہ استنتاج کے لئے کسی سلسلہ کی جانچ کرنے میں اگر ہم ضرورت خیال کریں تو رقوموں کی کسی محدود تعداد سے قطع نظر کر سکتے ہیں، ان رقوموں کا اخراج صرف انتہا کی قیمت پر اثر رکھتا ہے لیکن انتہا کے وجود پر اس کا کوئی اثر نہیں ہوگا۔

مثال ۱۔ سلسلہ $۱ + \frac{1}{۲} + \frac{1}{۳} + \frac{1}{۴} + \frac{1}{۵} + \frac{1}{۶} + \frac{1}{۷} + \frac{1}{۸} + \frac{1}{۹} + \frac{1}{۱۰}$ کو موسیقی سلسلہ کہتے ہیں انتہا کرو کہ یہ متع ہے باوجود اس کے کہ $ع = ۰$ ۔
تیسری رقم سے شروع ہو کر سلسلہ وار ۲ رقمیں، پھر ۲ یا ۲ رقمیں، پھر ۲ رقمیں وغیرہ کو۔

$$\text{اب } \frac{1}{3} + \frac{1}{3} < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \text{ یا } \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} < \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \text{ اور اسی طرح۔}$$

پس ۲۲ رقموں تک مجموعہ بڑا ہے ذیل کے سلسلہ سے

$$(1 + \frac{1}{2}) + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2} \dots ۲۲ رقموں تک$$

یعنی بڑا ہے $1 + \frac{1}{2}$ سے۔ اسلئے ن کو ہم اتنا بڑا لے سکتے ہیں کہ اس کی کسی بڑ سے بڑے مفروضہ عدد سے بڑا ہو یعنی سلسلہ متناقص ہے۔

مثال ۲۔ سلسلہ $1 + \frac{1}{2^a} + \frac{1}{2^b} + \frac{1}{2^c} + \dots$ مستحق ہوگا اگر $a < 1$ اور متناقص ہوگا اگر $a \geq 1$

(۱) $a < 1$ دوسری رقم سے شروع ہو کر رقموں کو اکٹھا کرو جیسے مثال میں

$$\frac{1}{2^a} + \frac{1}{2^b} > \frac{1}{2^c} + \frac{1}{2^d} \text{ یا } \frac{1}{2^a} + \frac{1}{2^b} + \frac{1}{2^c} > \frac{1}{2^d} + \frac{1}{2^e} + \frac{1}{2^f} + \frac{1}{2^g}$$

$$\frac{1}{2^a} + \frac{1}{2^b} + \frac{1}{2^c} + \frac{1}{2^d} > \frac{1}{2^e} + \frac{1}{2^f} + \frac{1}{2^g} + \frac{1}{2^h} \text{ یا } (\frac{1}{2^a} + \frac{1}{2^b} + \frac{1}{2^c} + \frac{1}{2^d} + \frac{1}{2^e} + \frac{1}{2^f} + \frac{1}{2^g} + \frac{1}{2^h} + \frac{1}{2^i} + \frac{1}{2^j} + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^l} + \frac{1}{2^m} + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^o} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{2^q} + \frac{1}{2^r} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{2^t} + \frac{1}{2^u} + \frac{1}{2^v} + \frac{1}{2^w} + \frac{1}{2^x} + \frac{1}{2^y} + \frac{1}{2^z})$$

وغیرہ وغیرہ
پس مجوزہ سلسلہ ذیل کے سلسلہ سے کم ہے

$$1 + \frac{1}{2^a} + (\frac{1}{2^b} + \frac{1}{2^c} + \frac{1}{2^d} + \frac{1}{2^e} + \frac{1}{2^f} + \frac{1}{2^g} + \frac{1}{2^h} + \frac{1}{2^i} + \frac{1}{2^j} + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^l} + \frac{1}{2^m} + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^o} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{2^q} + \frac{1}{2^r} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{2^t} + \frac{1}{2^u} + \frac{1}{2^v} + \frac{1}{2^w} + \frac{1}{2^x} + \frac{1}{2^y} + \frac{1}{2^z})$$

جو ایک سلسلہ ہندسیہ ہے جسکی نسبت مشترک ایک سے کم ہے۔ اس لئے یہ مستحق ہے۔ مجوزہ سلسلہ بھی اس لئے مستحق ہے۔

(۲) $a \geq 1$ صورت $a = 1$ پر مثال (۱) میں بحث کی گئی ہے۔
جب $a > 1$ تو سلسلہ کی رقمیں موسیقی سلسلہ کی متناظر رقموں سے بڑی ہوتی ہیں۔ اس لئے اس صورت میں سلسلہ متناقص ہے۔

جانب کی نسبت۔ فرض کرو کہ $۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵ + ۶ + ۷ + ۸ + ۹ + ۱۰ + \dots$ مثبت قیوں کا ایک سلسلہ ہے اور n کے لئے $\frac{1}{n}$ کی انتہا کم ہے سلسلہ مستحق ہوگا اگر $k < 1$ اور متع ہوگا اگر $k \geq 1$ اگر $k = 1$ تو یہ جانب استتفاق پر کھننے میں کارگر نہیں ہوگی۔

(۱) $k < 1$ انتہا کی تعریف کے بموجب ہم n کو اس قدر بڑا کر سکتے ہیں (مثلاً $n = m$) کہ جب $n \leq m$ تو نسبت $\frac{1}{n}$ اور k کا فرق اس قدر کم ہو جقدر ہم چاہیں گویا یہ نسبت اس منزل کے بعد ایک کسر واجب سے کم ہوگی۔

کم اگر m کا اس طرح انتخاب کیا جائے کہ

تو $\frac{1}{n} > \frac{1}{m} > \frac{1}{m+1} > \frac{1}{m+2} > \frac{1}{m+3} > \frac{1}{m+4} > \frac{1}{m+5} > \frac{1}{m+6} > \frac{1}{m+7} > \frac{1}{m+8} > \frac{1}{m+9} > \frac{1}{m+10} > \dots$

دیگر اس لئے رقم m کے بعد سلسلہ کی ہر ایک رقم ذیل کے سلسلہ ہندسیہ کی متناظر رقم سے کم ہوگی

$\frac{1}{m} + \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \frac{1}{m+3} + \frac{1}{m+4} + \frac{1}{m+5} + \frac{1}{m+6} + \frac{1}{m+7} + \frac{1}{m+8} + \frac{1}{m+9} + \frac{1}{m+10} + \dots$

چونکہ $\frac{1}{n} > \frac{1}{m}$ اس لئے مجوزہ سلسلہ مستحق ہے۔

(۲) $k < 1$ حسب بالا ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ سلسلہ متع ہوگا جبکہ نتیجہ صریح - دئے ہوئے سلسلہ کی باقی جب کم ہے ذیل کے سلسلہ سے

$\frac{1}{m} + \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \frac{1}{m+3} + \frac{1}{m+4} + \frac{1}{m+5} + \frac{1}{m+6} + \frac{1}{m+7} + \frac{1}{m+8} + \frac{1}{m+9} + \frac{1}{m+10} + \dots$ یعنی $\frac{1}{m} + \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \frac{1}{m+3} + \frac{1}{m+4} + \frac{1}{m+5} + \frac{1}{m+6} + \frac{1}{m+7} + \frac{1}{m+8} + \frac{1}{m+9} + \frac{1}{m+10} + \dots$

مثال ۳ - $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \dots$ (لا مثبت)

$$\frac{ع_1 + 1}{ع_1} = \frac{لا}{ن} \div \frac{لا - 1}{1 - ن}$$

$$= \frac{لا - 1}{ن}$$

ک = لا

اس لئے سلسلہ مستقیم ہوگا اگر لا > ۱ اور متع ہوگا اگر لا < ۱
اگر لا = ۱ تو یہ موسیقی سلسلہ ہے اور متع ہے۔

مثال ۲ - ۱ + لا + $\frac{لا^2}{۲}$ + $\frac{لا^3}{۳}$ + (لا مثبت)

$$\frac{ع_1 + 1}{ن} = \frac{لا}{ن} ، ک = .$$

اس لئے یہ سلسلہ (قوت نامی سلسلہ دفعہ ۹ حصہ اول) لا کی ہر مثبت قیمت کے لئے مستقیم ہے۔ ابھی ہم دیکھینگے کہ یہ لا کی ہر مثبت یا منفی قیمت کے لئے مستقیم ہے۔

۴۱ - استدقاق مطلق، قوتی سلسلے

مسئلہ ۱ - اگر کسی سلسلہ میں ہر دو مثبت اور منفی رقیب موجود ہوں اور یہ مستقیم ہو جبکہ تمام منفی رقیبوں کی علامت بدل دی جائے تو یہ اپنی اصلی حالت میں بھی مستقیم ہوگا۔

یہ ظاہر ہے کیونکہ منفی علامتوں کو بحال کرنے سے اس | اور ا | بن | اور | بن |

تعاریف ۱ - اگر کسی سلسلہ میں مثبت، منفی رقیب دونوں طرح کی موجود ہوں اور اس کی منفی رقیبوں کو مثبت بنانے سے جو سلسلہ بنے وہ مستقیم ہو تو اصطلاحاً اسے یوں بیان کرتے ہیں کہ اصلی سلسلہ مطلق طور پر یا بلا قید مستقیم ہے۔

یعنی ۱ + ۲ + ۳ + مطلق طور پر مستقیم ہوگا اگر ۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵ + ۶ + ۷ + ۸ + ۹ + ۱۰ + ۱۱ + ۱۲ + ۱۳ + ۱۴ + ۱۵ + ۱۶ + ۱۷ + ۱۸ + ۱۹ + ۲۰ + ۲۱ + ۲۲ + ۲۳ + ۲۴ + ۲۵ + ۲۶ + ۲۷ + ۲۸ + ۲۹ + ۳۰ + ۳۱ + ۳۲ + ۳۳ + ۳۴ + ۳۵ + ۳۶ + ۳۷ + ۳۸ + ۳۹ + ۴۰ + ۴۱ + ۴۲ + ۴۳ + ۴۴ + ۴۵ + ۴۶ + ۴۷ + ۴۸ + ۴۹ + ۵۰ + ۵۱ + ۵۲ + ۵۳ + ۵۴ + ۵۵ + ۵۶ + ۵۷ + ۵۸ + ۵۹ + ۶۰ + ۶۱ + ۶۲ + ۶۳ + ۶۴ + ۶۵ + ۶۶ + ۶۷ + ۶۸ + ۶۹ + ۷۰ + ۷۱ + ۷۲ + ۷۳ + ۷۴ + ۷۵ + ۷۶ + ۷۷ + ۷۸ + ۷۹ + ۸۰ + ۸۱ + ۸۲ + ۸۳ + ۸۴ + ۸۵ + ۸۶ + ۸۷ + ۸۸ + ۸۹ + ۹۰ + ۹۱ + ۹۲ + ۹۳ + ۹۴ + ۹۵ + ۹۶ + ۹۷ + ۹۸ + ۹۹ + ۱۰۰ + ۱۰۱ + ۱۰۲ + ۱۰۳ + ۱۰۴ + ۱۰۵ + ۱۰۶ + ۱۰۷ + ۱۰۸ + ۱۰۹ + ۱۱۰ + ۱۱۱ + ۱۱۲ + ۱۱۳ + ۱۱۴ + ۱۱۵ + ۱۱۶ + ۱۱۷ + ۱۱۸ + ۱۱۹ + ۱۲۰ + ۱۲۱ + ۱۲۲ + ۱۲۳ + ۱۲۴ + ۱۲۵ + ۱۲۶ + ۱۲۷ + ۱۲۸ + ۱۲۹ + ۱۳۰ + ۱۳۱ + ۱۳۲ + ۱۳۳ + ۱۳۴ + ۱۳۵ + ۱۳۶ + ۱۳۷ + ۱۳۸ + ۱۳۹ + ۱۴۰ + ۱۴۱ + ۱۴۲ + ۱۴۳ + ۱۴۴ + ۱۴۵ + ۱۴۶ + ۱۴۷ + ۱۴۸ + ۱۴۹ + ۱۵۰ + ۱۵۱ + ۱۵۲ + ۱۵۳ + ۱۵۴ + ۱۵۵ + ۱۵۶ + ۱۵۷ + ۱۵۸ + ۱۵۹ + ۱۶۰ + ۱۶۱ + ۱۶۲ + ۱۶۳ + ۱۶۴ + ۱۶۵ + ۱۶۶ + ۱۶۷ + ۱۶۸ + ۱۶۹ + ۱۷۰ + ۱۷۱ + ۱۷۲ + ۱۷۳ + ۱۷۴ + ۱۷۵ + ۱۷۶ + ۱۷۷ + ۱۷۸ + ۱۷۹ + ۱۸۰ + ۱۸۱ + ۱۸۲ + ۱۸۳ + ۱۸۴ + ۱۸۵ + ۱۸۶ + ۱۸۷ + ۱۸۸ + ۱۸۹ + ۱۹۰ + ۱۹۱ + ۱۹۲ + ۱۹۳ + ۱۹۴ + ۱۹۵ + ۱۹۶ + ۱۹۷ + ۱۹۸ + ۱۹۹ + ۲۰۰ + ۲۰۱ + ۲۰۲ + ۲۰۳ + ۲۰۴ + ۲۰۵ + ۲۰۶ + ۲۰۷ + ۲۰۸ + ۲۰۹ + ۲۱۰ + ۲۱۱ + ۲۱۲ + ۲۱۳ + ۲۱۴ + ۲۱۵ + ۲۱۶ + ۲۱۷ + ۲۱۸ + ۲۱۹ + ۲۲۰ + ۲۲۱ + ۲۲۲ + ۲۲۳ + ۲۲۴ + ۲۲۵ + ۲۲۶ + ۲۲۷ + ۲۲۸ + ۲۲۹ + ۲۳۰ + ۲۳۱ + ۲۳۲ + ۲۳۳ + ۲۳۴ + ۲۳۵ + ۲۳۶ + ۲۳۷ + ۲۳۸ + ۲۳۹ + ۲۴۰ + ۲۴۱ + ۲۴۲ + ۲۴۳ + ۲۴۴ + ۲۴۵ + ۲۴۶ + ۲۴۷ + ۲۴۸ + ۲۴۹ + ۲۵۰ + ۲۵۱ + ۲۵۲ + ۲۵۳ + ۲۵۴ + ۲۵۵ + ۲۵۶ + ۲۵۷ + ۲۵۸ + ۲۵۹ + ۲۶۰ + ۲۶۱ + ۲۶۲ + ۲۶۳ + ۲۶۴ + ۲۶۵ + ۲۶۶ + ۲۶۷ + ۲۶۸ + ۲۶۹ + ۲۷۰ + ۲۷۱ + ۲۷۲ + ۲۷۳ + ۲۷۴ + ۲۷۵ + ۲۷۶ + ۲۷۷ + ۲۷۸ + ۲۷۹ + ۲۸۰ + ۲۸۱ + ۲۸۲ + ۲۸۳ + ۲۸۴ + ۲۸۵ + ۲۸۶ + ۲۸۷ + ۲۸۸ + ۲۸۹ + ۲۹۰ + ۲۹۱ + ۲۹۲ + ۲۹۳ + ۲۹۴ + ۲۹۵ + ۲۹۶ + ۲۹۷ + ۲۹۸ + ۲۹۹ + ۳۰۰ + ۳۰۱ + ۳۰۲ + ۳۰۳ + ۳۰۴ + ۳۰۵ + ۳۰۶ + ۳۰۷ + ۳۰۸ + ۳۰۹ + ۳۱۰ + ۳۱۱ + ۳۱۲ + ۳۱۳ + ۳۱۴ + ۳۱۵ + ۳۱۶ + ۳۱۷ + ۳۱۸ + ۳۱۹ + ۳۲۰ + ۳۲۱ + ۳۲۲ + ۳۲۳ + ۳۲۴ + ۳۲۵ + ۳۲۶ + ۳۲۷ + ۳۲۸ + ۳۲۹ + ۳۳۰ + ۳۳۱ + ۳۳۲ + ۳۳۳ + ۳۳۴ + ۳۳۵ + ۳۳۶ + ۳۳۷ + ۳۳۸ + ۳۳۹ + ۳۴۰ + ۳۴۱ + ۳۴۲ + ۳۴۳ + ۳۴۴ + ۳۴۵ + ۳۴۶ + ۳۴۷ + ۳۴۸ + ۳۴۹ + ۳۵۰ + ۳۵۱ + ۳۵۲ + ۳۵۳ + ۳۵۴ + ۳۵۵ + ۳۵۶ + ۳۵۷ + ۳۵۸ + ۳۵۹ + ۳۶۰ + ۳۶۱ + ۳۶۲ + ۳۶۳ + ۳۶۴ + ۳۶۵ + ۳۶۶ + ۳۶۷ + ۳۶۸ + ۳۶۹ + ۳۷۰ + ۳۷۱ + ۳۷۲ + ۳۷۳ + ۳۷۴ + ۳۷۵ + ۳۷۶ + ۳۷۷ + ۳۷۸ + ۳۷۹ + ۳۸۰ + ۳۸۱ + ۳۸۲ + ۳۸۳ + ۳۸۴ + ۳۸۵ + ۳۸۶ + ۳۸۷ + ۳۸۸ + ۳۸۹ + ۳۹۰ + ۳۹۱ + ۳۹۲ + ۳۹۳ + ۳۹۴ + ۳۹۵ + ۳۹۶ + ۳۹۷ + ۳۹۸ + ۳۹۹ + ۴۰۰ + ۴۰۱ + ۴۰۲ + ۴۰۳ + ۴۰۴ + ۴۰۵ + ۴۰۶ + ۴۰۷ + ۴۰۸ + ۴۰۹ + ۴۱۰ + ۴۱۱ + ۴۱۲ + ۴۱۳ + ۴۱۴ + ۴۱۵ + ۴۱۶ + ۴۱۷ + ۴۱۸ + ۴۱۹ + ۴۲۰ + ۴۲۱ + ۴۲۲ + ۴۲۳ + ۴۲۴ + ۴۲۵ + ۴۲۶ + ۴۲۷ + ۴۲۸ + ۴۲۹ + ۴۳۰ + ۴۳۱ + ۴۳۲ + ۴۳۳ + ۴۳۴ + ۴۳۵ + ۴۳۶ + ۴۳۷ + ۴۳۸ + ۴۳۹ + ۴۴۰ + ۴۴۱ + ۴۴۲ + ۴۴۳ + ۴۴۴ + ۴۴۵ + ۴۴۶ + ۴۴۷ + ۴۴۸ + ۴۴۹ + ۴۵۰ + ۴۵۱ + ۴۵۲ + ۴۵۳ + ۴۵۴ + ۴۵۵ + ۴۵۶ + ۴۵۷ + ۴۵۸ + ۴۵۹ + ۴۶۰ + ۴۶۱ + ۴۶۲ + ۴۶۳ + ۴۶۴ + ۴۶۵ + ۴۶۶ + ۴۶۷ + ۴۶۸ + ۴۶۹ + ۴۷۰ + ۴۷۱ + ۴۷۲ + ۴۷۳ + ۴۷۴ + ۴۷۵ + ۴۷۶ + ۴۷۷ + ۴۷۸ + ۴۷۹ + ۴۸۰ + ۴۸۱ + ۴۸۲ + ۴۸۳ + ۴۸۴ + ۴۸۵ + ۴۸۶ + ۴۸۷ + ۴۸۸ + ۴۸۹ + ۴۹۰ + ۴۹۱ + ۴۹۲ + ۴۹۳ + ۴۹۴ + ۴۹۵ + ۴۹۶ + ۴۹۷ + ۴۹۸ + ۴۹۹ + ۵۰۰ + ۵۰۱ + ۵۰۲ + ۵۰۳ + ۵۰۴ + ۵۰۵ + ۵۰۶ + ۵۰۷ + ۵۰۸ + ۵۰۹ + ۵۱۰ + ۵۱۱ + ۵۱۲ + ۵۱۳ + ۵۱۴ + ۵۱۵ + ۵۱۶ + ۵۱۷ + ۵۱۸ + ۵۱۹ + ۵۲۰ + ۵۲۱ + ۵۲۲ + ۵۲۳ + ۵۲۴ + ۵۲۵ + ۵۲۶ + ۵۲۷ + ۵۲۸ + ۵۲۹ + ۵۳۰ + ۵۳۱ + ۵۳۲ + ۵۳۳ + ۵۳۴ + ۵۳۵ + ۵۳۶ + ۵۳۷ + ۵۳۸ + ۵۳۹ + ۵۴۰ + ۵۴۱ + ۵۴۲ + ۵۴۳ + ۵۴۴ + ۵۴۵ + ۵۴۶ + ۵۴۷ + ۵۴۸ + ۵۴۹ + ۵۵۰ + ۵۵۱ + ۵۵۲ + ۵۵۳ + ۵۵۴ + ۵۵۵ + ۵۵۶ + ۵۵۷ + ۵۵۸ + ۵۵۹ + ۵۶۰ + ۵۶۱ + ۵۶۲ + ۵۶۳ + ۵۶۴ + ۵۶۵ + ۵۶۶ + ۵۶۷ + ۵۶۸ + ۵۶۹ + ۵۷۰ + ۵۷۱ + ۵۷۲ + ۵۷۳ + ۵۷۴ + ۵۷۵ + ۵۷۶ + ۵۷۷ + ۵۷۸ + ۵۷۹ + ۵۸۰ + ۵۸۱ + ۵۸۲ + ۵۸۳ + ۵۸۴ + ۵۸۵ + ۵۸۶ + ۵۸۷ + ۵۸۸ + ۵۸۹ + ۵۹۰ + ۵۹۱ + ۵۹۲ + ۵۹۳ + ۵۹۴ + ۵۹۵ + ۵۹۶ + ۵۹۷ + ۵۹۸ + ۵۹۹ + ۶۰۰ + ۶۰۱ + ۶۰۲ + ۶۰۳ + ۶۰۴ + ۶۰۵ + ۶۰۶ + ۶۰۷ + ۶۰۸ + ۶۰۹ + ۶۱۰ + ۶۱۱ + ۶۱۲ + ۶۱۳ + ۶۱۴ + ۶۱۵ + ۶۱۶ + ۶۱۷ + ۶۱۸ + ۶۱۹ + ۶۲۰ + ۶۲۱ + ۶۲۲ + ۶۲۳ + ۶۲۴ + ۶۲۵ + ۶۲۶ + ۶۲۷ + ۶۲۸ + ۶۲۹ + ۶۳۰ + ۶۳۱ + ۶۳۲ + ۶۳۳ + ۶۳۴ + ۶۳۵ + ۶۳۶ + ۶۳۷ + ۶۳۸ + ۶۳۹ + ۶۴۰ + ۶۴۱ + ۶۴۲ + ۶۴۳ + ۶۴۴ + ۶۴۵ + ۶۴۶ + ۶۴۷ + ۶۴۸ + ۶۴۹ + ۶۵۰ + ۶۵۱ + ۶۵۲ + ۶۵۳ + ۶۵۴ + ۶۵۵ + ۶۵۶ + ۶۵۷ + ۶۵۸ + ۶۵۹ + ۶۶۰ + ۶۶۱ + ۶۶۲ + ۶۶۳ + ۶۶۴ + ۶۶۵ + ۶۶۶ + ۶۶۷ + ۶۶۸ + ۶۶۹ + ۶۷۰ + ۶۷۱ + ۶۷۲ + ۶۷۳ + ۶۷۴ + ۶۷۵ + ۶۷۶ + ۶۷۷ + ۶۷۸ + ۶۷۹ + ۶۸۰ + ۶۸۱ + ۶۸۲ + ۶۸۳ + ۶۸۴ + ۶۸۵ + ۶۸۶ + ۶۸۷ + ۶۸۸ + ۶۸۹ + ۶۹۰ + ۶۹۱ + ۶۹۲ + ۶۹۳ + ۶۹۴ + ۶۹۵ + ۶۹۶ + ۶۹۷ + ۶۹۸ + ۶۹۹ + ۷۰۰ + ۷۰۱ + ۷۰۲ + ۷۰۳ + ۷۰۴ + ۷۰۵ + ۷۰۶ + ۷۰۷ + ۷۰۸ + ۷۰۹ + ۷۱۰ + ۷۱۱ + ۷۱۲ + ۷۱۳ + ۷۱۴ + ۷۱۵ + ۷۱۶ + ۷۱۷ + ۷۱۸ + ۷۱۹ + ۷۲۰ + ۷۲۱ + ۷۲۲ + ۷۲۳ + ۷۲۴ + ۷۲۵ + ۷۲۶ + ۷۲۷ + ۷۲۸ + ۷۲۹ + ۷۳۰ + ۷۳۱ + ۷۳۲ + ۷۳۳ + ۷۳۴ + ۷۳۵ + ۷۳۶ + ۷۳۷ + ۷۳۸ + ۷۳۹ + ۷۴۰ + ۷۴۱ + ۷۴۲ + ۷۴۳ + ۷۴۴ + ۷۴۵ + ۷۴۶ + ۷۴۷ + ۷۴۸ + ۷۴۹ + ۷۵۰ + ۷۵۱ + ۷۵۲ + ۷۵۳ + ۷۵۴ + ۷۵۵ + ۷۵۶ + ۷۵۷ + ۷۵۸ + ۷۵۹ + ۷۶۰ + ۷۶۱ + ۷۶۲ + ۷۶۳ + ۷۶۴ + ۷۶۵ + ۷۶۶ + ۷۶۷ + ۷۶۸ + ۷۶۹ + ۷۷۰ + ۷۷۱ + ۷۷۲ + ۷۷۳ + ۷۷۴ + ۷۷۵ + ۷۷۶ + ۷۷۷ + ۷۷۸ + ۷۷۹ + ۷۸۰ + ۷۸۱ + ۷۸۲ + ۷۸۳ + ۷۸۴ + ۷۸۵ + ۷۸۶ + ۷۸۷ + ۷۸۸ + ۷۸۹ + ۷۹۰ + ۷۹۱ + ۷۹۲ + ۷۹۳ + ۷۹۴ + ۷۹۵ + ۷۹۶ + ۷۹۷ + ۷۹۸ + ۷۹۹ + ۸۰۰ + ۸۰۱ + ۸۰۲ + ۸۰۳ + ۸۰۴ + ۸۰۵ + ۸۰۶ + ۸۰۷ + ۸۰۸ + ۸۰۹ + ۸۱۰ + ۸۱۱ + ۸۱۲ + ۸۱۳ + ۸۱۴ + ۸۱۵ + ۸۱۶ + ۸۱۷ + ۸۱۸ + ۸۱۹ + ۸۲۰ + ۸۲۱ + ۸۲۲ + ۸۲۳ + ۸۲۴ + ۸۲۵ + ۸۲۶ + ۸۲۷ + ۸۲۸ + ۸۲۹ + ۸۳۰ + ۸۳۱ + ۸۳۲ + ۸۳۳ + ۸۳۴ + ۸۳۵ + ۸۳۶ + ۸۳۷ + ۸۳۸ + ۸۳۹ + ۸۴۰ + ۸۴۱ + ۸۴۲ + ۸۴۳ + ۸۴۴ + ۸۴۵ + ۸۴۶ + ۸۴۷ + ۸۴۸ + ۸۴۹ + ۸۵۰ + ۸۵۱ + ۸۵۲ + ۸۵۳ + ۸۵۴ + ۸۵۵ + ۸۵۶ + ۸۵۷ + ۸۵۸ + ۸۵۹ + ۸۶۰ + ۸۶۱ + ۸۶۲ + ۸۶۳ + ۸۶۴ + ۸۶۵ + ۸۶۶ + ۸۶۷ + ۸۶۸ + ۸۶۹ + ۸۷۰ + ۸۷۱ + ۸۷۲ + ۸۷۳ + ۸۷۴ + ۸۷۵ + ۸۷۶ + ۸۷۷ + ۸۷۸ + ۸۷۹ + ۸۸۰ + ۸۸۱ + ۸۸۲ + ۸۸۳ + ۸۸۴ + ۸۸۵ + ۸۸۶ + ۸۸۷ + ۸۸۸ + ۸۸۹ + ۸۹۰ + ۸۹۱ + ۸۹۲ + ۸۹۳ + ۸۹۴ + ۸۹۵ + ۸۹۶ + ۸۹۷ + ۸۹۸ + ۸۹۹ + ۹۰۰ + ۹۰۱ + ۹۰۲ + ۹۰۳ + ۹۰۴ + ۹۰۵ + ۹۰۶ + ۹۰۷ + ۹۰۸ + ۹۰۹ + ۹۱۰ + ۹۱۱ + ۹۱۲ + ۹۱۳ + ۹۱۴ + ۹۱۵ + ۹۱۶ + ۹۱۷ + ۹۱۸ + ۹۱۹ + ۹۲۰ + ۹۲۱ + ۹۲۲ + ۹۲۳ + ۹۲۴ + ۹۲۵ + ۹۲۶ + ۹۲۷ + ۹۲۸ + ۹۲۹ + ۹۳۰ + ۹۳۱ + ۹۳۲ + ۹۳۳ + ۹۳۴ + ۹۳۵ + ۹۳۶ + ۹۳۷ + ۹۳۸ + ۹۳۹ + ۹۴۰ + ۹۴۱ + ۹۴۲ + ۹۴۳ + ۹۴۴ + ۹۴۵ + ۹۴۶ + ۹۴۷ + ۹۴۸ + ۹۴۹ + ۹۵۰ + ۹۵۱ + ۹۵۲ + ۹۵۳ + ۹۵۴ + ۹۵۵ + ۹۵۶ + ۹۵۷ + ۹۵۸ + ۹۵۹ + ۹۶۰ + ۹۶۱ + ۹۶۲ + ۹۶۳ + ۹۶۴ + ۹۶۵ + ۹۶۶ + ۹۶۷ + ۹۶۸ + ۹۶۹ + ۹۷۰ + ۹۷۱ + ۹۷۲ + ۹۷۳ + ۹۷۴ + ۹۷۵ + ۹۷۶ + ۹۷۷ + ۹۷۸ + ۹۷۹ + ۹۸۰ + ۹۸۱ + ۹۸۲ + ۹۸۳ + ۹۸۴ + ۹۸۵ + ۹۸۶ + ۹۸۷ + ۹۸۸ + ۹۸۹ + ۹۹۰ + ۹۹۱ + ۹۹۲ + ۹۹۳ + ۹۹۴ + ۹۹۵ + ۹۹۶ + ۹۹۷ + ۹۹۸ + ۹۹۹ + ۱۰۰۰

مستدق ہو۔ کسی اور طرح کے مستدق سلسلے کو نیم مستدق یا مستدق بالشرط کہیں گے۔
مسئلہ ۱ کا عکس درست نہیں، سلسلہ ۱ + ۲ + ۳ + ۴ + مستدق ہو سکتا ہے
اور ۱ + ۲ + ۳ + ۴ + متنوع (ملاحظہ ہو مثال ۱)
نتیجہ صریح۔ ایک سلسلہ مطلق طور پر مستدق ہوگا اگر $\frac{ع_۱ + ۱}{ع_۱}$ کی انتہا

تعداد ۱ ایک کسر واجب کے مساوی ہو۔
مطلق طور پر مستدق سلسلے خاص اہمیت رکھتے ہیں، رقموں کی ترتیب کے
بدلنے سے مجموعہ پر کوئی اثر نہیں پڑتا۔ مستدق بالشرط سلسلہ کی رقموں کو اسی طرح
پر ترتیب دینا ممکن ہے کہ نیا سلسلہ جو پیدا ہو وہ مستدق ہو لیکن کسی اور انتہا کی طرف
استدقاق کرے یا یہاں تک کہ متنوع ہو جائے۔ الفاظ ”بالشرط“ اور ”بلاشرط“
کی یہی وجہ تسمیہ ہے۔ [ملاحظہ ہو جبر و مقابلہ کمرشل حصہ دوم باب
۲۶، دفعہ ۱۳]

مسئلہ ۲۔ اگر معادیر $ع_۱، ع_۲، ع_۳، ...$ سب مثبت ہوں اور ان میں سے
ہر ایک اپنی رقم ماقبل سے کم ہو (یا اس کے مساوی ہو) نیز اگر $ع_۱$ کی انتہا
صفر ہو تو سلسلہ

$$ع_۱ - ع_۲ + ع_۳ - ع_۴ + + (-۱)^{n-1} ع_n + =$$

مستدق ہوگا۔ اس سلسلہ کو متبادل سلسلہ کہا جا سکتا ہے۔
رقموں کی جفت تعداد کا مجموعہ ہم ذیل کی دو صورتوں میں لکھ سکتے ہیں۔

$$ع_۱ = (ع_۱ - ع_۲) + (ع_۳ - ع_۴) + + (ع_{2n-1} - ع_{2n})$$

$$ع_۱ = ع_۲ - (ع_۲ - ع_۳) - (ع_۴ - ع_۵) - - ع_{2n}$$

پہلی صورت سے ظاہر ہے کہ $ع_۱$ مثبت ہے اور $ع_n$ کے بڑھنے سے بڑھتا ہے
دوسری صورت سے ظاہر ہے کہ $ع_۱$ سے کم ہے کیونکہ ہر فرق مثبت ہے

اس لئے میں ایک انتہا (مثلاً) کی طرف مستحق ہوتا ہے۔

نیز $s_{1+n_2} = s_{n_2} + e_{1+n_2}$ ، اب چونکہ e_{1+n_2} صفر ہے،

اس لئے n اور n کی ایک ہی انتہا ہے، اس لئے سلسلہ مستقر ہے۔

نتیجہ صریح ابن اکرم ہے ع۔س۔

مثال ۱- $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \dots$ اس لئے مستحق ہے جیسا کہ اس سے قبل
(صفحہ ۳۹) میں بتایا گیا۔ لیکن سلسلہ

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots \dots \dots \text{متسلسلہ ہے۔}$$

مسئلہ ۳۔ اگر سلسلہ $6 + 6 + \dots$ مطلق طور پر مستحق ہو اور

و، و، و..... میں سے ہر ایک مقدار ایک محدود مقدار ج سے کم ہو تو سلسلہ ع، و، ع + و، ع + و + ع..... مطلق طور پر مستند ہو گا۔

سلسلہ | ع | و | + | ع | و | + کی رقمیں ذیل کے سلسلہ کی متناظر رقموں سے کم ہیں

$$\{ \dots + |e\rangle + |e\rangle \} \text{ يا } \dots + |e\rangle + |e\rangle$$

اس لئے $|a| + |b| + |c| + \dots$ مستحق ہے اور اس لئے $a + b + c + \dots$ مطلق طور پر مستحق ہے۔

مثال ۲- $\frac{\text{جب ۱}}{۱} - \frac{\text{جب ۲}}{۲} + \frac{\text{جب ۳}}{۳} - \frac{\text{جب ۴}}{۴} + \dots$

سلسلہ $\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$ مطلق طور پر مستقر ہے اور

میں لکھتے سے ہم دیکھتے ہیں کہ اس کی رقمیں ذیل کے ہندسی سلسلہ کی متناظر رقموں سے بڑی ہیں

$$\dots\dots\dots + \left(\frac{1}{r}\right) + \left(\frac{1}{r}\right) + \dots\dots\dots$$

اس لئے سلسلہ مطلق طور پر مستند ہے جب تک کہ $\frac{1}{r}$ تعداد ایک سے کم ہو۔
اُس صورت میں جبکہ $\frac{1}{r} = 1$ سلسلہ مستند ہو سکتا ہے یا متنع، لیکن اگر مستند ہو تو سلسلہ کی ہر ایک رقم جبکہ $\frac{1}{r} = 1$ سے محدود ہوگی اور سلسلہ مطلق طور پر مستند ہوگا جبکہ $\frac{1}{r}$ سے تعداد کم ہو۔

استدقاق کا وقفہ۔ جب ایک سلسلہ جسکی رقمیں $\frac{1}{r}$ کے متقابل ہوں مستند ہو جبکہ $\frac{1}{r} > 1$ تو اہم ایسے یوں بیان کر سکتے ہیں کہ سلسلہ وقفہ (۱) $\frac{1}{r}$ کے اندر مستند ہے، جب سلسلہ $\frac{1}{r}$ کی قیمتوں $\frac{1}{r} > 1$ کے لئے مستند ہو اور متنع ہو $\frac{1}{r} < 1$ اور $\frac{1}{r} < 1$ کے لئے تو (۱) $\frac{1}{r}$ کو استدقاق کا وقفہ کہتے ہیں۔

$$\dots\dots\dots + \frac{1}{r^2} - \frac{1}{r^3} + \frac{1}{r^4} - \dots\dots\dots$$

مثال ۳۔ سلسلہ $\frac{1}{r}$ مستند ہے (شرطاً) جبکہ $\frac{1}{r} = 1$ اس لئے مطلق طور پر مستند ہے جبکہ $\frac{1}{r} > 1$ یا $\frac{1}{r} < 1$ متنع ہے جبکہ $\frac{1}{r} = 1$ اور جبکہ $\frac{1}{r} < 1$

$$\dots\dots\dots + \frac{1}{r^2} - \frac{1}{r^3} + \frac{1}{r^4} - \dots\dots\dots$$

مثال ۴۔ سلسلہ $\frac{1}{r}$ مطلق طور پر مستند ہے جبکہ $\frac{1}{r} \geq 1$ متنع ہے جبکہ $\frac{1}{r} < 1$ ۔
دونوں سلسلوں کے لئے (۱) $\frac{1}{r}$ استدقاق کا وقفہ ہے۔

۴۲۔ کیساں استدقاق۔ جب ایک سلسلہ کی رقمیں $\frac{1}{r}$ کے متقابل ہوں اور سلسلہ ایک وقفہ کے اندر مستند ہو تو وقفہ میں کسی ایک معلومہ قیمت

لے کے $\frac{1}{r}$ کو اس طور پر منتخب کرنا ممکن ہوگا کہ باقی کسی ایک دی ہوئی مقدار

کہ ہر نیکن لا کی مختلف قیمتوں کے لئے بالعموم ن کی مختلف قیمتیں جو باقی کو بھرتی
 مقدار سے کم بنائیں گی۔ اسلئے
تعریف۔ ایک سلسلہ جسکی قیمتیں لا کے تفاعل میں ایک وقفہ کے اندر
 یکساں طور پر مستحق کہلاتا ہے اگر ن کو اس طور پر منتخب کرنا ممکن ہو مثلاً ن = ۴
 کن کی ہر ایسی قیمت کے لئے جو م کے مساوی یا اس سے بڑی ہو اور لا کی
 ہر ایسی قیمت کے لئے جو وقفہ ممل گورہ کے اندر واقع
 ہو باقی جب ایک دی ہوئی مثبت مقدار صہ سے کم رہے۔
 متغیر کو پیش نظر رکھنے کے لئے ہم یہ ترتیم اختیار کریں گے

ع (لا)، س (لا)، ب (لا)، س (لا)

مسئلہ ۱۔ اگر ایک سلسلہ ع (لا) + ع (لا) + کیساں طور پر مستحق
 ہو جبکہ لا \geq ب اور اگر اسی وقفہ کے اندر سلسلہ کی ہر رقم لا کا مسلسل
 تفاعل ہو تو مجموعہ س (لا) بھی اس وقفہ میں مسلسل تفاعل ہو گا۔
 فرض کرو کہ سعت کے اندر متغیر کی دو قیمتیں لا اور لا ہیں، ہمیں ثابت کرنا ہے کہ
 اگر صہ مقرر کر لیا جائے تو لا کے استقدر قریب لینا ممکن ہے کہ
 اس (لا)، س (لا) | صہ سے کم ہو۔ معمولی ترتیم کے مطابق

س (لا) - س (لا) = س (لا) - س (لا) + س (لا) - س (لا)

اور اسلئے اس (لا) - س (لا) \geq اس (لا) - س (لا) + س (لا) - س (لا) + س (لا) - س (لا)
 اولاً چونکہ سلسلہ کیساں طور پر مستحق ہے ہم م کو اس طور پر منتخب کر سکتے ہیں کہ
 اس صورت میں جبکہ ن \leq م دونوں ب (لا) اور ب (لا) صہ سے
 کم ہوں۔ فرض کرو کہ م کو اس طرح پر منتخب کر لیا گیا ہے۔

دوسرے س (لا) مسلسل تفاعلوں کی محدود تعداد کا مجموعہ ہے، اسلئے ہم

ثبوت کے لئے ضروری ہے کہ لا وقفہ کے اندر ہو، ذیل کے مسئلہ (ایپل کے مسئلہ) کے ثبوت کے لئے ملاحظہ ہو کر سٹل کا الجبرا، حصہ دوم، باب ۲۶، دفعہ ۲۰، یعنی اگر ایک سلسلہ مستدق ہو جبکہ لا = ص (یا - ص) ہو جو تفاعل سلسلہ سے تعبیر ہوتا ہے وہ مسلسل ہو گا قیمت ص (یا - ص) تک اور شمولیت خود ان قیمتوں کے، دوسرے الفاظ میں تفاعل کی قیمت جبکہ لا = ص دی ہوگی جو کہ سلسلہ کی قیمت ہے جبکہ لا = ص جس طریقہ سے قوتی سلسلہ کا یکساں استندفاق قائم کیا گیا ہے اس کی با آسانی توسیع ہو سکتی ہے ذیل کے مسئلہ کے اثبات میں۔

مسئلہ ۳۔ اگر ایک سلسلہ کی قیمتیں لا کے مسلسل تفاعل ہوں جبکہ $1 \geq لا \geq ب$ اور یہ قیمتیں، ایک مطلق طور پر مستدق سلسلہ کی متناظر قیمتوں سے جن میں لا شامل نہیں ہوتا تعداد کم ہوں تو اول الذکر سلسلہ وقفہ مذکورہ کے اندر یکساں طور پر مستدق ہوگا۔

طالب علم یکساں اور مطلق استندفاق میں التماس نہ کرے، سلسلے یکساں طور پر مستدق ہو سکتے ہیں حالانکہ وہ مطلق طور پر مستدق نہ ہوں، مگر ایسے سلسلے ہماری کتاب کی حدود سے باہر ہیں۔

ذیل کی مشق میں سوالات ۹، ۱۰، ۱۱ خاص طور پر قابل توجہ ہیں۔

مشق ۱۲

۱۔ ثابت کرو کہ ذیل کے سلسلے مستدق ہیں

$$(۱) 1 + 2^{-۱} + 3^{-۱} + 4^{-۱} + \dots + (۲) لا + لا + لا + لا + \dots (۳) لا + لا + لا + \dots$$

$$(۳) \frac{1}{(1+1)^۱} + \frac{1}{(۲+1)^۱} + \frac{1}{(۳+1)^۱} + \dots (۴) لا + لا + لا + \dots$$

۲۔ ثابت کرو کہ ذیل کے سلسلے مستدق ہیں

$$(۱) \frac{1}{۲} + \frac{1}{۴} + \frac{1}{۶} + \dots (۲) 1 + \frac{1}{۳} + \frac{1}{۵} + \dots$$

$$(۳) \quad \frac{1}{(۱+n)} \quad (۴) \quad \frac{۱+n}{۱+n^2}$$

$$(۵) \quad \frac{۱+n}{ج+ن} [۱ \neq ۰]$$

$$۳- \text{ اگر } \frac{1}{۱} + \frac{1}{۲} + \frac{1}{۳} + \dots = ج$$

$$\text{تو ثابت کرو کہ (۱) } \frac{1}{۴} = \dots + \frac{1}{۲} + \frac{1}{۳} + \frac{1}{۴}$$

$$(۲) \quad \frac{۳}{۴} = \dots + \frac{1}{۵} + \frac{1}{۳} + \frac{1}{۴}$$

ج کی قیمت $\frac{۳}{۴}$ ہے (مشق ۱۳ سوال ۲۲)

۴- ثابت کرو کہ ذیل کا سلسلہ (سلسلہ ثنائی)

$$۱ + م + لا + \frac{۲(۱-۴)}{۲ \times ۱} + \frac{۲(۱-۴)(۱-۴)}{۳ \times ۲ \times ۱} + \dots$$

م کی ہر قیمت کے لئے مطلق طور پر مستحق ہے جبکہ $لا > ۱$ ، لیکن متسع ہے جبکہ $لا < ۱$

$$\text{کیونکہ } \frac{ع+ن}{ع} = \frac{۱+n}{ن} = لا = (۱ - \frac{۱}{ن}) \text{ لہذا } \frac{ع+ن}{ع} = لا$$

۵- اگر ف (ن) کا ایک منق، صحیح تفاعل ہو تو سلسلہ
ج ف (ن) لا مطلق طور پر مستحق ہوگا جبکہ $لا > ۱$ لیکن متسع ہوگا
جبکہ $لا < ۱$

فرض کرو کہ ف (ن) = $۱ + \frac{۱}{ن} + \frac{۱}{ن^2} + \dots$ جہاں ف (ن)

کا مجموعہ لے رہے، تب

اس لئے قوتی سلسلہ کو مستحق ماننا درست تھا۔

۱۳۔ مثال ۱۲ سے یا بلا واسطہ ثابت کرو کہ جب $a > 1$ تو

$$1 - \frac{1}{a^2}$$

$$1 + \frac{1}{a^2} - \frac{1}{a^4} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^4} - \frac{1}{a^6} + \frac{1}{a^8} - \frac{1}{a^{10}} + \dots$$

۱۴۔ ثابت کرو کہ اگر طہ نہ صفر ہو اور نہ ہی $\pi/2$ کا ضعف ہو،

تو سلسلہ $\text{جم طہ} + \frac{1}{2} \text{جم طہ} + \frac{1}{3} \text{جم طہ} + \dots$ مستحق ہے۔

۱۵۔ کو ۲ جب $\frac{\text{طہ}}{2}$ کے ساتھ ضرب دو اور ہر حاصل ضرب کو جیبوں کے فرق کے طور پر بیان کرو ترتیب بدلنے سے حاصل ہوگا

$$2 \sin \frac{\text{طہ}}{2} = \frac{1}{2} \text{جب طہ} + \frac{1}{2} \text{جب } \frac{\text{طہ}}{2} + \frac{1}{2} \text{جب } \frac{\text{طہ}}{4} + \dots$$

$$+ \dots + \frac{1}{(n-1)n} \text{جب } \frac{1-n}{2} \text{طہ} + \frac{1}{n} \text{جب } \frac{1+n}{2} \text{طہ}$$

$$\text{اس لئے } 2 \sin \frac{\text{طہ}}{2} = \frac{\text{طہ}}{2} - \frac{1}{2} \text{جب طہ} + \frac{1}{2} \text{جب } \frac{\text{طہ}}{2} + \frac{1}{2} \text{جب } \frac{\text{طہ}}{4} + \dots$$

$$+ \left\{ \frac{1}{2} \text{جب } \frac{\text{طہ}}{2} + \dots + \frac{1}{(n-1)n} \text{جب } \frac{1-n}{2} \text{طہ} + \frac{1}{n} \text{جب } \frac{1+n}{2} \text{طہ} \right\}$$

لیکن خطوط وحدانی کے اندر جو جملہ ہے اسکی انتہا ∞ کے لئے محدود ہے

کیونکہ لانتہا ہی سلسلہ $\frac{1}{2} + \frac{1}{3 \times 2} + \frac{1}{4 \times 3} + \dots$ مستحق ہے۔

اس لئے $2 \sin \frac{\text{طہ}}{2}$ کی انتہا محدود ہے یعنی \sin کی بشرطیکہ جب $\frac{\text{طہ}}{2}$ صفر نہ ہو۔

۱۵۔ سوال ۱۴ کی سی قیود کے ماتحت ثابت کرو کہ جن سلسلوں کی n دیں ان میں

$$\frac{1}{n} \text{جب } n \text{ طہ} - \frac{1}{(n-1)} \text{جم } n \text{ طہ} + \frac{1}{n} \text{جب } n \text{ طہ}$$

ہیں وہ مستحق ہیں۔

باہشتم

ٹیلر کا مسئلہ

۴۳۔ ٹیلر کا مسئلہ۔ دفعہ ۲، حصہ اول میں ہم نے ذیل کی مساوات حاصل کی۔

ف (لا) = ف (لا) + (لا - لا) ف (لا) + $\frac{1}{p}$ (لا - لا) ف (لا) (لام)
اور اگرچہ لا کے متعلق جو کچھ ہم جانتے ہیں وہ صرف اتنا کہ ہے کہ یہ لا اور لا کے
درمیان واقع ہوتا ہے تاہم جب (لا - لا) چھوٹا ہو تو تفاعل ف (لا) پر
غور پر ذیل کے درجہ دوم کے تفاعل سے بغیر ہوتا ہے

$$ف (لا) + (لا - لا) ف (لا) + \frac{1}{p} (لا - لا) ف (لا)$$

جس میں مختلف صرف (لا) ف (لا) ف (لا) کی قیمتوں پر جس جگہ لا = لا
یہ ایک عام مسئلہ کی خاص صورت ہے، اب ہم عام مسئلہ پر بحث کریں گے۔
پہلے ہم ف (لا) کے لئے ایک بند جملہ حاصل کریں گے جس میں لا جیسا ایک معلوم
عدد نہ ہوگا اس کے بعد تفاعل درجہ دوم کی بجائے ہم ایک توتی سلسلہ
حاصل کریں گے۔ دفعہ ۲، حصہ اول میں جو طریقہ استعمال کیا گیا ہے اس کی دہرائی
تقریب ضروری ہوگی تاکہ دراصل کا مسئلہ صرف ایک مرتبہ لگا نا پڑے۔

فرض کرو کہ ف (لا) اور اس کے پہلے نشتق لا = لا سے لا = ب
تک مسلسل ہیں۔
ایک مقدار ق فرض کرو جسکی تعین ذیل کی مساوات سے ہوتی ہے۔

ف (ب) - { ف (ا) + (ب - ا) ف (ا) + (ب - ا) ف (ا) + ...

..... + (ب - ا) ف (ا) = { (ب - ا) ف (ا) + (ب - ا) ف (ا) + ... (۱)

روٹی کے مسئلہ کی رو سے ہم ق کے لئے ایک جملہ حاصل کر سکتے ہیں جسکو (۱) میں مندرج کرنے سے مطلوبہ عام مسئلہ حاصل ہوگا۔

فرض کر کہ ف (ا) ایک لاکھ تعامل ہے جس کی تعین ذیل کی مساوات سے ہوتی ہے۔

ف (ا) = ف (ب) - ف (لا) - (ب - لا) ف (ا) - (ب - لا) ف (ا) + ... (۲)

مساوات (۱) کی رو سے ف (ا) = ۰، نیز ف (ب) = ۰۔ مطابق۔
نیز ف (ا) اور ف (لا) دونوں مسلسل ہیں لا = ۱ سے لا = ب تک
کیونکہ ف (لا) اور اس کے پہلے ن مشتق مسلسل مضروب مسلسل ہیں۔
روٹی کے مسئلہ کی رو سے ف (ا) صفر ہے، لہذا کی کم از کم ایک قیمت لا
کے لئے جو ا اور ب کے درمیان واقع ہوتی ہے، (۲) کو تفریق کرنے اور تحلیل

ف (ا) = (ب - لا) ف (ا) + ف (لا) + (ب - لا) ف (ا) + ... (۳)

اور چونکہ (ب - لا) صفر نہیں ہے، اس لئے

ق = ف (ا) = { (ب - لا) ف (ا) + (ب - لا) ف (ا) + ... (۴)

..... (۴)
جہاں > ط > ا کیونکہ ا اور ب کے درمیان کا کوئی عدد
ا + ط (ب - ا) سے تعبیر ہو سکتا ہے۔

(۴) سے ق کی جو قیمت حاصل ہوتی ہے اسکو (۱) میں مندرج کر دو اور
اتقام ف (ا) (ب - ا) ف (ا) + ... کو مساوات کی دوسری

جانب لے جاؤ، اس طرح حاصل ہوگا

$$\text{ف (ب)} = \text{ف (ا)} + (\text{ب} - \text{ا}) \text{ف (ا)} + \frac{(\text{ب} - \text{ا})^2}{2} \text{ف (ا)} + \dots$$

$$+ \dots + \frac{(\text{ب} - \text{ا})^{n-1}}{(n-1)!} \text{ف (ا)} + \frac{(\text{ب} - \text{ا})^n}{n!} \text{ف (ا)} + \dots + \dots + \dots$$

(۵).....

اب ہم ب کی بجائے لا استعمال کر سکتے ہیں۔ (ا) میں ب کو ہم نے صرف اس لئے استعمال کیا ہے کہ اوسط قیمت کا مسئلہ نکلنے میں التباس پیدا نہ ہو۔

$$\text{ف (لا)} = \text{ف (ا)} + (\text{لا} - \text{ا}) \text{ف (ا)} + \frac{(\text{لا} - \text{ا})^2}{2} \text{ف (ا)} + \dots$$

$$+ \dots + \frac{(\text{لا} - \text{ا})^{n-1}}{(n-1)!} \text{ف (ا)} + \frac{(\text{لا} - \text{ا})^n}{n!} \text{ف (ا)} + \dots + \dots + \dots$$

(۶).....

سادات (۶) کا مسئلہ ٹیلر کے مسئلہ سے موسوم ہوتا ہے، اسکی خاص صورت جبکہ $\text{ا} = ۰$ حسب ذیل ہے۔

$$\text{ف (لا)} = \text{ف (۰)} + (\text{لا} - ۰) \text{ف (۰)} + \frac{(\text{لا} - ۰)^2}{2} \text{ف (۰)} + \dots$$

$$+ \dots + \frac{(\text{لا} - ۰)^{n-1}}{(n-1)!} \text{ف (۰)} + \frac{(\text{لا} - ۰)^n}{n!} \text{ف (۰)} + \dots + \dots + \dots$$

(۷).....

اے مسئلہ رن کا مسئلہ کہتے ہیں۔

جن شرائط کے ماتحت ٹیلر کا مسئلہ ثابت کیا گیا ہے وہ یہ ہیں، 'ف (لا) اور اس کے پہلے ن مشتق مسلسل (اور اس لئے محدود) ہیں (لا = ا سے لا کی اس قیمت تک جس کے لئے ف (لا) کی قیمت معلوم کی جاتی ہے۔ عموماً طما کے لئے صرف ہی کہا جاسکتا ہے کہ یہ ایک مثبت کسر واجب ہے۔

عام طور پر اسکی قیمت ن اور لا کی مختلف قیمتوں کے لئے مختلف ہوگی۔

ٹیلر کے مسئلہ میں باقی مساوات (۶) میں پہلی ن رقموں کے مجموعہ کو

میں (لا) سے تعبیر کرو اور آخری رقم کو جب (لا) سے۔ اس طرح

ف (لا) = ل (لا) + ب (لا) اور

ب (لا) = $\frac{(لا-۱)}{۲}$ ف { ۱ + ط (لا-۱) } (۸)

اگر ہم ن کو لا انتہا بڑھا دیں تو (۶) کے بائیں جانب کا مجموعہ ایک لامتناہی سلسلہ ہو جاتا ہے اور اگر جب (لا) صفر ہو تو یہ سلسلہ مستحق ہوتا ہے۔

ف (لا) اور اس کے پہلے ن مشتق سب مفروضہ سلسلے ہیں اور ہر مشتق کو سلسلہ رہنا چاہئے تاکہ ہم ن کو لا انتہا فرض کر سکیں۔ اس لئے

مسئلہ۔ اگر ف (لا) اور اس کے سب مشتق صحت زیر بحث میں سلسلے ہوں اور اگر جب (لا) کی انتہا صفر ہو تو لا متناہی سلسلہ

ف (۱) + ف (لا-۱) + $\frac{ف (لا-۱)^۲}{۲}$ + (۹)

جو (۶) میں ن کو لا متناہی فرض کرنے سے حاصل ہوتا ہے مستحق ہوگا اور تعامل ف (لا) کو تعبیر کرے گا یعنی یہ سلسلہ ف (لا) کی جانب مستحق ہوگا۔

[نوٹ ایسی صورتیں مرتب ہو سکتی ہیں جن میں (۹) مستحق ہو لیکن قیمت ف (لا) کی جانب مستحق نہ ہو، لیکن عام عملی حالات میں ایسی صورتیں واقع نہیں ہوں گی]

سلسلہ (۹) کو ف (لا) کے لئے ٹیلر کا سلسلہ کہتے ہیں جب

(۶) اور (۹) میں تیز کرنا مقصود ہو تو (۶) کو ٹیلر کے ضابطہ سے ہم موسوم کر سکتے ہیں

ظاہر ہے کہ اوپر جو کچھ ٹیلر کے سلسلہ کے متعلق ذکر کیا گیا ہے وہ سب کچھ

اس کی خاص صورت منظر اراں کے سلسلہ

ف (۰) + ل ف (۰) + $\frac{ل^۲}{۲}$ ف (۰) + (۱۰)

(مشق ۱۲ سوال ۴) اسلئے ہم لا کی صرف ان قیمتوں پر غور کریں گے جن کے لئے

$$1 \geq 1$$

(۱) $1 > 1$ جب (لا) کو تین اجزائے ضربی کے حاصل ضرب کے سادی لکھو

$$1 - 1 + 1 = 1 \quad (1 - 1 + 1) = 1 \quad (1 - 1 + 1) = 1 \quad (1 - 1 + 1) = 1 \quad (1 - 1 + 1) = 1$$

پہلا جزو ضربی ۱ کی ہر قیمت کے لئے محدود ہے کیونکہ $(1 + 1 + 1) = 3$ اور $1 - 1 + 1 = 1$

اور $(1 + 1) = 2$ کے درمیان واقع ہوتا ہے، دوسرا جزو ضربی ایک سے تجاوز

نہیں ہو سکتا، تیسرے جزو ضربی کی انتہا صفر ہے کیونکہ یہ مستحق سلسلہ

$$1 + (1 - 1) + \frac{(1 - 1)(1 - 1)}{2 \times 1} + \dots$$

کی ۱ ویں رقم ہے۔ اسلئے جب (لا) صفر ہے اور ۱ کی تمام قیمتوں کے لئے جیتک کہ $1 > 1$ یا $1 \geq 1$ لا متناہی سلسلہ $(1 + 1)$ کی طرف مستحق ہوتا ہے۔

(ب) $1 \geq 1$ ، یہ صورتیں ایسی ضروری نہیں اور جب (لا) کی تحقیق طولانی ہے، اس جگہ صرف ہم نتائج کا حوالہ دینگے، ثبوت کے لئے ملاحظہ ہو کرسل کا الجبرا، حصہ دوم، باب ۲۶ دفعہ ۶۔

$1 + 1 = 2$ ، سلسلہ مطلق طور پر مستحق ہے اگر $1 < 1$ اور مستحق بالشرط ہے اگر $1 < 1$ ، سلسلہ اہتراندی ہے اگر $1 = 1$ اور مستحق اگر $1 > 1$ ۔ $1 = 1$ ، سلسلہ مطلق طور پر مستحق ہوتا ہے اگر $1 < 1$ اور مستحق ہوتا ہے اگر $1 > 1$ ۔

اگر $1 \neq 1$ ب توجہ ثنائی $(1 + 1)$ کو لکھو ایسے $(1 + 1)$ کے

یا $(1 + 1)$ اور پھر 1 کی بجائے 1 لکھو اگر 1 کم ہو

تعداداً 1 سے یا 1 کی بجائے 1 لکھو اگر 1 کم ہو

پہلے سے ۔۔

(۵) لوک (۱+لا)۔ لوک لا کو مٹا کر ان کے مسئلہ کے فریب پھیلاؤ
مکمل نہیں کیونکہ لوک لا استناہی ہو جاتا ہے جبکہ لا = ۰، لیکن ہم لوک لا کو
ٹیلر کے مسئلہ کی مدد سے (لا-۱) کی قوتوں میں پھیلا سکتے ہیں اگر لا مثبت
ہو۔ لوک (۱+لا) کو پھیلاؤ آسان ہے۔

$$ف(لا) = لوک(۱+لا) = ف(لا) = \frac{1}{1+لا}، ف^{(۱)}(لا) = \frac{-۱}{(۱+لا)^۲} = \frac{-۱}{(۱+لا)^۲}$$

$$ف^{(۲)}(لا) = ۰، ف^{(۳)}(لا) = ۱، ف^{(۴)}(لا) = ۰، ف^{(۵)}(لا) = ۰، ف^{(۶)}(لا) = ۰، ف^{(۷)}(لا) = ۰، ف^{(۸)}(لا) = ۰، ف^{(۹)}(لا) = ۰، ف^{(۱۰)}(لا) = ۰$$

$$لوک(۱+لا) = لا - \frac{لا^۲}{۲} + \frac{لا^۳}{۳} - \frac{لا^۴}{۴} + \dots + \frac{لا^n}{n} + \dots$$

لا استناہی سلسلہ متناہی ہے اگر $|لا| < ۱$ اور اگر $لا = ۱$ ۔

اسلئے ہم باقی پر اس صورت میں غور کرتے ہیں جبکہ $لا > ۱$ ۔
اگر لا مثبت ہو تو لگدریج کی صورت باقی یہ ہے

$$بس(لا) = (۱-لا)^{-۱} = \frac{1}{1-لا}$$

اسکی انتہا صفر ہے کیونکہ $\left(\frac{لا}{۱+لا}\right)$ کبھی ایک سے بڑا نہیں ہو سکتا۔

اسکی انتہا صفر ہے۔
اگر لا منفی ہو تو کوشی کی صورت

$$بس(لا) = (۱-لا)^{-۱} = \frac{1}{1-لا} \times \frac{1}{1+لا} = \frac{1}{(۱+لا)^۲}$$

جس سے ظاہر ہے کہ اگر $لا > ۱$ تو انتہا صفر ہوگی کیونکہ $لا$ کی انتہا صفر
اور $ف$ کی ہر قیمت کے لئے دوسرے اجزاء ضربی محدود ہیں۔

اس لئے لوک $(1 + \lambda) = \lambda - \frac{\lambda^2}{2} + \frac{\lambda^2}{3} - \frac{\lambda^2}{4} + \dots$
 جہاں $1 > \lambda \geq 1$ ، یہ سلسلہ بالشرط مستحق ہے جبکہ $\lambda = 1$ ادا نہیں ہوگا
 $\lambda = 1$ کہنے سے

$$\text{لوک } 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

(۶) لوکار تم محسوب کرنا۔ اوپر جو سلسلہ معلوم کیا گیا ہے وہ سرعت سے
 مستحق نہیں ہوتا اس لئے حسابات کی غرض سے چنداں موزوں نہیں۔

لوک $(1 + \lambda) = \lambda - \frac{\lambda^2}{2} + \frac{\lambda^2}{3} - \frac{\lambda^2}{4} + \dots$ (۱)
 لا کی بجائے۔ لا کہنے سے

لوک $(1 - \lambda) = \lambda - \frac{\lambda^2}{2} + \frac{\lambda^2}{3} - \frac{\lambda^2}{4} + \dots$ (۲)
 چونکہ لوک $(1 + \lambda) - (1 - \lambda) = 2$ لوک $(1 - \lambda) = \frac{\lambda + 1}{\lambda - 1}$
 اس لئے تفریق سے

$$\text{لوک } \frac{\lambda + 1}{\lambda - 1} = 2 \left\{ \lambda + \frac{\lambda^2}{3} + \frac{\lambda^2}{5} + \dots + \frac{\lambda^{2n-1}}{1 - \lambda^{2n}} \right\} \quad (۳)$$

فرض کرو کہ لا مثبت ہے اور $\frac{\lambda + 1}{\lambda - 1} = \frac{1 + \lambda}{\lambda - 1}$ جس سے $\lambda = \frac{1}{1 + \lambda^2} > 1$
 مساوات (۳) ہو جاتی ہے

$$\text{لوک } (1 + \lambda) = \text{لوک } 1 + \lambda + \frac{1}{1 + \lambda^2} + \frac{1}{1 + \lambda^4} + \frac{1}{1 + \lambda^6} + \dots \quad (۴)$$

اس سے لوک $(1 + \lambda)$ معلوم ہو سکتا ہے اگر لوک کا معلوم ہو۔ یاد رہے کہ
 (۴) میں ایک قوی سلسلہ نہیں ہے۔

معددا اعداد ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، کے لوکارتم آسانی معلوم ہو سکتے ہیں مثلاً

$$\text{فا} = ۱ \text{، لوک } ۲ = ۲ \left\{ \frac{1}{۳} + \frac{1}{۳ \times ۳} + \frac{1}{۳ \times ۵} + \dots \right\}$$

$$\text{فا} = ۲ \text{، لوک } ۳ = ۳ \text{، لوک } ۲ = ۲ \left\{ \frac{1}{۵} + \frac{1}{۵ \times ۳} + \frac{1}{۵ \times ۵} + \dots \right\}$$

اب لوک ۴ = ۲ لوک ۲، لوک ۵، فا کی بجائے ۴ لکھنے سے حاصل ہوگا اور
لوک ۶ = لوک ۲ + لوک ۳ وغیرہ۔ سلسلہ (۴) سرعت سے مستند ہوتا ہے
فا کی صورت میں بھی۔ خاص اعداد کے لئے خاص ترکیبیں استعمال ہو سکتی
ہیں۔ مثلاً اگر فا = ۴۹ تو مساوات (۴) سے لوک کے معلوم ہوگا لوک ۲ اور
لوک ۵ کی رقوم میں اور سلسلہ بڑی سرعت سے مستند ہوگا۔

طالب علم عزیز معلومات اور حوالہ کی غرض سے کرسٹل کا جبر و مقابلہ

حصہ دوم، باب ۲۸ دفعہ ۱۱ دیکھیے۔
(۵) دائرہ کی قوس کے طول کے متعلق ہائی گن کا قاعدہ۔

اگر ل قوس کے وتر کا طول ۱ ہو اور نصف قوس کا وتر ب ہو تو قوس کا طول

(۱) تقریباً $\frac{۸ب}{۳}$ ہوگا۔

فرض کرو کہ قوس کے سامنے دائرہ کے مرکز پر زاویہ ط نیم قطری بنتا ہے
اور دائرہ کا نصف قطر ہے۔ تب ل = ر ط اور

$$۱ = ۲ \text{ رجب } \frac{ط}{۲} = ۲ \left\{ \frac{ط}{۲} - \frac{1}{۴} \left(\frac{ط}{۲} \right)^۲ + \frac{1}{۱۲} \left(\frac{ط}{۲} \right)^۳ - \dots \right\}$$

(۱).....

$$ب = ۲ \text{ رجب } \frac{ط}{۲} = ۲ \left\{ \frac{ط}{۲} - \frac{1}{۴} \left(\frac{ط}{۲} \right)^۲ + \frac{1}{۱۲} \left(\frac{ط}{۲} \right)^۳ - \dots \right\}$$

(۲).....

(۲) کو ۸ سے ضرب دو اور (۱) کو تفریق کرو، اس طرح ط والی رقم ساقل

ہو جائے گی۔

$$\text{اِس لئے } ۸ \text{ ب۔ } ۱ = ۲ \left\{ \frac{۳}{۲} ط۷ - \frac{۳}{۲ \times ۱۲۰} ط۸ + \dots \right\}$$

$$= ۳ \text{ ل۔ } ۱ \left\{ \frac{ط۸}{۶۸۰} + \dots \right\}$$

اِس لئے ط۸ اور اِس سے اعلیٰ قوتوں کو نظر انداز کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{ل۔ } ۱ = \frac{۸ \text{ ب۔ } ۱}{۳}$$

یہ ثابت ہو سکتا ہے کہ ۳ کے زاویہ کی صورت میں انسانی فلفلی $\frac{۱}{۱۰۰}$ سے کم ہے

$$\text{اور } ۴۵ \text{ " " " " } \frac{۱}{۲۰۰}$$

$$\text{اور } ۹۰ \text{ " " " " } \frac{۱}{۶۰۰}$$

۲۵۔ ن، ویں مشتق کا محسوب کرنا۔

مکارن کے سلسلہ کی مدد سے کسی تفاعل کے لئے قوتی سلسلہ معلوم کرنے میں جو عملی مشکل پیش آتی ہے وہ ف (لا) کا نکالنا ہے۔ مذکورہ بالا صورتوں کے علاوہ بہت کم صورتیں ایسی ہیں جن میں ن، والے مشتق زیادہ سے قلوب شکل اختیار نہیں کرتا۔ باقی ب (لا) کی بحث ناممکن ہے جب تک کہ ف (لا) معلوم نہ ہو جائے۔ بعض خاص صورتوں میں ف (لا) معلوم ہو سکتا ہے اور مکارن کا لامتناہی سلسلہ اگر یہ مستحق ہو تو (بالعموم) وقفہ استفادہ کے اندر ف (لا) کو تعبیر کرتا ہے۔

اِس تعلق میں لیب نینس کا مسئلہ (دفعہ ۶۸ حصہ اول) نہایت کارآمد ثابت ہوتا ہے۔

بطور مثال کے ف (لا) = جب (لا جب لا) پر غور کرو۔
اِس صورت میں ف (لا) کو بلا واسطہ معلوم کرنا مشکل ہو گا اس لئے ہم

پہلے ف (لا) اور ف (لا) معلوم کر کے ایک تفرقی مساوات بناتے ہیں جس پر لیب نیس کا مسئلہ لگائیگا اس طرح ف (۰) کی قیمت معلوم ہو جائیگی۔
ف (لا) = جب (لا جب لا)

$$ف (لا) = لا جب (لا جب لا) \times \frac{1}{لا - لا} \dots\dots\dots (۱)$$

$$ف (لا) = لا جب (لا جب لا) \times \frac{1}{لا - لا} + لا جب (لا جب لا) \times \frac{1}{لا - لا} \dots\dots\dots (۲)$$

$$= لا ف (لا) \times \frac{1}{لا - لا} + لا ف (لا) \times \frac{1}{لا - لا} \dots\dots\dots (۳)$$

اس لئے (۱- لا) ف (لا) = لا ف (لا) + لا ف (لا) = (۰) (۳)
ف (لا) ف (لا) ف (لا) میں لا کو صفر بنانے سے ہم دیکھتے ہیں کہ
ف (۰) = (۰) ف (۰) = لا ف (۰) = (۰) = (۰)

(۳) کی رو سے دائیں جانب کا تفاعل ہمیشہ صفر ہوتا ہے، اس لئے اس کا ن، واں مشتق بھی صفر ہوگا۔ یہ تفاعل حاصل ضربوں کا مجموعہ ہے اس لئے اسکی ہر رقم لیب نیس کا مسئلہ لگانے سے ن دغہ تفرق ہو سکتی ہے۔ پہلی رقم کے لئے فرض کرو کہ

$$ف (لا) = لا، (۱- لا) = لا، دوسرے سے اعلیٰ و کاہر$$

مشتق صفر ہے، ف (لا) کا ن، واں مشتق ف (۱+ لا) ہے (ن-۱)

واں ف (۱+ لا) وغیرہ پس

$$عف (۱- لا) ف (لا) = (۱- لا) ف (۱+ لا) + ج (۲- لا) ف (۱+ لا)$$

$$+ ج (۲- لا) ف (۲- لا)$$

اسی طرح عف (لا ف لا) = لا ف (۱+ لا) + ن ف (ن) (لا)

نیز۔ عفت $\{ \text{ا}^{\text{ن}} \text{ف} (\text{لا}) \} = \{ \text{ا}^{\text{ن}} \text{ف} (\text{لا}) \}$
جمع کرنے سے تھوڑی تحویل کے بعد حاصل ہوگا

$$(1-\text{لا}) \text{ف} (\text{لا})^{\text{ن}+2} (\text{لا}) - (1+\text{ن}) \text{لا} \text{ف} (\text{لا})^{\text{ن}+1} (\text{لا}) - (\text{ن}-\text{ا}^{\text{ن}}) \text{ف} (\text{لا})^{\text{ن}} (\text{لا}) =$$

(۴)

اس لئے جب، لا = تو

$$\text{ف} (\text{لا})^{\text{ن}+2} (\text{لا}) = (\text{ن}-\text{ا}^{\text{ن}}) \text{ف} (\text{لا})^{\text{ن}} (\text{لا}) \dots \dots \dots (5)$$

مساوات (۵) سے سب مشتق دوسرے سے اعلیٰ درجہ کے لا = کے لئے معلوم ہو سکتے ہیں کیونکہ پہلے دو معلوم ہیں

$$\text{ف} (\text{لا})^{\text{ن}} (\text{لا}) = (\text{ن}-2) \text{ف} (\text{لا})^{\text{ن}} (\text{لا}) =$$

$$\text{ف} (\text{لا})^{\text{ن}} (\text{لا}) = (\text{ن}-4) \text{ف} (\text{لا})^{\text{ن}} (\text{لا}) = \dots \dots \dots \text{ وغیرہ، پس ہر مشتق صفر ہے۔ نیز}$$

$$\text{ف} (\text{لا})^{\text{ن}} (\text{لا}) = (\text{ن}-1) \text{ف} (\text{لا})^{\text{ن}} (\text{لا}) = (\text{ن}-2) \text{ف} (\text{لا})^{\text{ن}} (\text{لا})$$

$$\text{ف} (\text{لا})^{\text{ن}} (\text{لا}) = (\text{ن}-3) \text{ف} (\text{لا})^{\text{ن}} (\text{لا}) = (\text{ن}-4) \text{ف} (\text{لا})^{\text{ن}} (\text{لا})$$

اور اسی طرح سے عام قیمت یہ ہے

$$\text{ف} (\text{لا})^{\text{ن}-1} (\text{لا}) = (\text{ن}-1) \text{ف} (\text{لا})^{\text{ن}-2} (\text{لا}) \dots \dots \dots \{ (\text{ن}-3) \text{ف} (\text{لا})^{\text{ن}-4} (\text{لا}) \}$$

$$\text{جب (واجب لا)} = \text{لا} + \frac{\text{لا} (\text{ن}-1) \text{ف} (\text{لا})^{\text{ن}-2} (\text{لا})}{2} + \frac{\text{لا} (\text{ن}-2) \text{ف} (\text{لا})^{\text{ن}-3} (\text{لا})}{6} + \dots \dots \dots (6)$$

یہ سلسلہ متناہی ہوگا اگر لا طاق عدد ہو، باقی سب صورتوں میں یہ لامتناہی ہوگا

$$\text{لا}^{\text{ن}+1} \text{دالی رقم کی نسبت رقم ماقبل کے ساتھ } \frac{\text{ن} (\text{ن}-1) \text{ف} (\text{لا})^{\text{ن}-2} (\text{لا})}{(1+\text{ن})} \text{ لا ہے اور}$$

چونکہ اس نسبت کی انتہا لا ہے، اس لئے سلسلہ (۶) مطلق طور پر مستحق ہے

جب تک کہ $1 > لا > 1 + لا$ اور بعض مقاصد کے لحاظ سے پھیلاؤ کی چند رقیبیں معلوم کرنا کافی ہوتا ہے اور تھوڑے بہت محنت کے ساتھ چند مشتقوں کا رکال ایسا دشوار نہیں ہوتا۔ مثلاً لوک $(1 + جب لا)$ کے پہلے تین پادشتوں باسانی محسوب ہو سکتے ہیں اور پھیلاؤ کی پہلی تین رقیبیں حاصل ہوتی ہیں $لا - \frac{لا^2}{2} + \frac{لا^3}{6}$ لیکن ایسی صورتوں میں اس طرح کا عمل زیادہ سہولت بخش ہوتا ہے۔ فرض کرو کہ

$ا = لا + لا + لا + ...$ 'ف (ما) = $ب + ب + ب + ب + ب + ...$ سلسلہ $ب + ب + ب + ب + ب + ...$ میں $ا$ کی بجائے پہلا سلسلہ مندرجہ کرد اور $لا$ کی قوتوں میں اسے ترتیب دو۔ $لا$ کی کافی طور پر چھوٹی قیمتوں کے لئے سلسلہ حاصل مستحق ہوگا۔ مثلاً

$$ا = جب لا = لا - \frac{لا^2}{2} + \frac{لا^3}{6} - \dots$$

$$\text{لوک } (ا + ا) = ا - \frac{ا^2}{2} + \frac{ا^3}{6} - \dots \text{ اس لئے}$$

$$\text{لوک } (ا + جب لا) = (لا - \frac{لا^2}{2} + \frac{لا^3}{6} - \dots) - \frac{1}{2} (لا - \frac{لا^2}{2} + \frac{لا^3}{6} - \dots) + \frac{1}{6} (لا - \frac{لا^2}{2} + \frac{لا^3}{6} - \dots) - \dots$$

اس طریقہ کا ثبوت یہاں نہیں دیا جاسکتا۔

۴۶۔ سلسلوں کا تفرق اور تکمیل۔ بعض اوقات کسی تعامل کی خاصیتیں جس لامتناہی سلسلہ کو استعمال کرنے سے جو تعامل کو تعبیر کرتا ہے

جب $n \leq m$ تو باقی $(n - m)$ اور b کے درمیان $(n - m)$ کی ہر قیمت کے لئے m سے کم ہو، اس لئے اگر m کی یہ قیمت منتخب کر لی جائے تو $n \leq m$ کے لئے مقدار $(n - m)$ تعداد m ہوگی $(n - m)$ سے m فرلا سے یعنی m (لا۔ ج) سے اسلئے اگر $n \leq m$ تو فوق

گ f (لا) فرلا۔ لی (لا)

تعداد m ہوگا m (لا۔ ج) سے اور اس فرق کی انتہا ∞ کے لئے صفر ہے۔

اسلئے f (لا) فرلا = ∞ لی (لا) = ∞ (لا) فرلا + ∞ (لا) فرلا + = ∞

مسئلہ ۲۔ اگر سلسلہ $a, (a), (a), (a), \dots$ مستحق ہو اور

f (لا) کی طرف مائل ہو جبکہ $a \geq b$ تو f (لا) کا مشتق اوپر کے سلسلہ کو رقم برقم تفرق کرنے سے حاصل ہوتا ہے یعنی f (لا) = a (لا) + a (لا) + = ∞

بشرطیکہ سلسلہ $a, (a), (a), (a), \dots$ سے $a = b$ تک یکساں طور پر مستحق ہو۔

فرض کر کہ f (لا) = a (لا) + a (لا) + a (لا) + = ∞ تب چونکہ a (لا) + a (لا) + a (لا) + = ∞ یکساں طور پر مستحق ہے

اس لئے مسئلہ (۱) کی رو سے

$$ج \text{ فَا } (لا) \text{ در لا } = ج \text{ ع } (لا) \text{ در لا } + ج \text{ ع } (لا) \text{ در لا } + \dots$$

$$= \{ج \text{ ع } (لا) - ج \text{ (ج)}\} + \{ج \text{ ع } (لا) - ج \text{ (ج)}\} + \dots$$

$$= ج \text{ (لا)} + ج \text{ (لا)} + \dots - \{ج \text{ (ج)} + ج \text{ (ج)} + \dots\}$$

$$= ف \text{ (لا)} - مستقل$$

اس لئے $\frac{ج}{ف} \text{ فَا } (لا) \text{ در لا } = ف \text{ (لا)} \text{ یعنی فَا } (لا) = ف \text{ (لا)}$

دفعہ ۴۲ مسئلہ ۲ کی رو سے ہم دیکھتے ہیں کہ ایک قوتی سلسلہ کو رقم برقم مکمل کیا جاسکتا ہے اگر لا وقفہ استدقاق کے اندر واقع ہو۔

اب ہم ثابت کریں گے کہ جو سلسلہ قوتی سلسلہ کو تفریق کرنے سے حاصل ہوتا ہے وہ یکساں طور پر مستحق ہوتا ہے جبکہ دفعہ ۴۲ مسئلہ ۲ کی ترقیم کے

مطابق - $س > ل \geq لا \geq با > س$ اور اس سلسلے

کا مشتق اس لئے اسکو رقم برقم تفریق کرنے سے حاصل ہوتا ہے۔ کیونکہ

سلسلہ $ح ح ل ل د$ مطلق طور پر مستحق ہے اور اسلئے $ل ل د$ اہرن

کے لئے محدود ہے یعنی (فرض کرو کہ) ج سے کم ہے۔
سلسلہ کے تفریق سے یہ سلسلہ حاصل ہوگا

$$ل + ل + ل + لا + \dots + ن ل ل لا + \dots + ل + ل + ل + لا + \dots$$

اگر صرف عددی قیمتوں کو ملحوظ رکھا جائے تو

$$ن \frac{1}{2} لا^{1-ن} = ن \frac{1}{2} لا^{1-ن-1} \left(\frac{لا}{2} \right) > ن \frac{1}{2} ج \left(\frac{لا}{2} \right) \quad (1-ن)$$

اس لئے مشتقوں کے سلسلہ کی رقیں ذیل کے سلسلہ کی متناظر رقیوں سے
تعداداً کم ہیں

$$\left\{ \frac{ج}{2} + 1 + \left(\frac{لا}{2} \right)^2 + \left(\frac{لا}{2} \right)^3 + \dots \right\}$$

لیکن یہ سلسلہ مطلق طور پر مستحق ہے کیونکہ جانچ کی نسبت $\frac{لا}{2}$ ہے جو تعداد

ایک سے کم ہے۔ اس لئے مشتقوں کا سلسلہ کیساں طور پر مستحق ہے جبکہ لا

دفعہ (۱) کے اندر کوئی عدد ہو جہاں اعداد ۱ اور ب ایسے ہیں کہ

$$س > ۱ > ب > ص \quad (دفعہ ۲۲، مسئلہ ۲)$$

$$\text{مثال لوک } (۱+لا) = لا - \frac{1}{۲} لا + \frac{1}{۳} لا - \dots \quad (۱ \geq لا > ۱)$$

تفرق کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$- \dots - لا + لا - ۱ = \frac{1}{لا+۱}$$

یہ مساوات درست ہے اگر $۱ > لا > ۱$ لیکن یہ درست نہیں رہتی اگر $لا = ۱$

۴۷۔ مثالیں۔ اس جگہ ہم دو مثالیں حل کریں گے جن میں معلومہ
سلسلہ کو تکمیل کرنے سے ایک تفاعل کو بطور ایک سلسلہ کے پھیلا یا جائیگا۔

(۱) مسـ لا

$$\text{اگر } ۱ > لا > ۱ \text{ تو}$$

$$\frac{1}{لا+۱} = ۱ - لا + لا^2 - \dots + لا^{۲} (۱-۱) + لا^{۲} + \dots \quad (۱)$$

اس لئے صفر سے لا تک تکمیل کرنے سے

$$(f) \dots + \frac{1+5n^2}{1+5n^2} (1) + \dots + \frac{4}{4} - \frac{5}{5} + \frac{3}{3} - n = 1$$

تفصیل (۱) صرف اس صورت میں ثابت کی گئی ہے جبکہ $1 > 1$ ، سلسلہ
(۱) اتھناری ہے جبکہ $1 = 1$ لیکن (۱) $1 = 1$ کے لئے مستحق ہے،
اس لئے ہم ایمل کا مسئلہ (صفحہ ۱۹۲) لگا سکتے ہیں اور یہ حاصل کر سکتے ہیں کہ
(۱) اس صورت میں بھی درست رہتا ہے جبکہ $1 = 1$ ۔
اگر $1 = 1$ تو حاصل ہوتا ہے

$$(1) \dots\dots\dots + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \frac{\pi}{4}$$

سلسلہ (۱) کو ۱۱ کے لئے گریڈ دی جاوے گا (بعض اوقات لیپ فینٹر کا) سلسلہ کہتے ہیں، لیکن یہ سرعت سے مستحق نہیں ہوتا، اس لئے حساب لگانے کی غرض سے موزوں نہیں۔ یہی ممکن کا ضابطہ استعمال کرنے سے بہتر سلسلہ حاصل ہوتا ہے۔

$$r = \frac{\pi}{2} = \text{مست}^1 \left(\frac{1}{5}\right) - \text{مست}^1 \left(\frac{1}{239}\right)$$

اس ضابطہ کو استعمال کر کے پھیلاؤ (۱) کی مدد سے π کا محسوب کرنا طالب علم کے لئے اچھی مشق ہوگی۔ مس^۱ ($\frac{1}{5}$) اور مس^۱ ($\frac{1}{239}$) کے سلسلے بڑی سرعت سے مستحق ہوتے ہیں، ان سے π کی قیمت اعشاریہ کے پانچویں یا چھٹے مقام تک باسانی حاصل ہوتی ہے۔

(۲) جیہاں اگر $1 > \lambda$ اتو ثنائی پھیلاؤ کی رو سے

..... + $\frac{2 \times 5 \times 3 \times 1}{2 \times 2 \times 2} + \frac{2 \times 3 \times 1}{2 \times 2} + \frac{2 \times 1}{2} + 1 = \frac{1}{2} - (1 - \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$
 اس لئے صفر سے لاسک تک مکمل کرنے سے

$$\text{جب } 1 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \dots$$

ذیل کی مثال میں ہم دیکھینگے کہ ایک سلسلہ کے ذریعہ ایک کھلمہ کی تقریبی قیمت کس طرح حاصل ہو سکتی ہے۔

(۳) اگر ایک سادہ رفاص کا طول L ہو اور یہ خط انتصابی کے دونوں جانب نزویہ حصہ میں سے اہتر از کرے تو اس کے پورے اہتر از کا وقت

$$= 2 \sqrt{\frac{L}{g}} \quad \text{جہاں}$$

$$L = \frac{v^2}{g} \quad \text{مرفہ} \quad \left(\text{ک} = \text{جب } \frac{v}{g} \right) \quad \text{ک کے لئے ایک سلسلہ مطلوب ہے۔}$$

(۱- ک) جب $\frac{v}{g}$ کو مسئلہ ثانی کی رو سے پھیلاؤ اور پھر رقم برقم تکمل کرو۔ اس طرح

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \dots$$

جب $\frac{v}{g}$ جب $\frac{v}{g}$ کے یکجہ اس سے قبل دفعہ ۱۰ میں معلوم کئے گئے ہیں اسلئے

$$\frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{6} \right) + \left(\frac{1}{7} \right) + \left(\frac{1}{8} \right) + \left(\frac{1}{9} \right) + \left(\frac{1}{10} \right) + \dots$$

اگر $\frac{v}{g}$ چھوٹا ہو تو $\frac{1}{2}$ کو نظر انداز کر سکتے ہیں، اس صورت میں

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \dots$$

$$(۲) \quad \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \dots$$

(رشتہ صحیح ہے)

اگر $1 > 1$ تو مشق ۱۲ سوال ۱۳ کی رو سے

$$\left\{ \frac{1}{2-1} + \frac{1}{2-1} + \frac{1}{2-1} + \frac{1}{2-1} + \dots \right\} = \frac{1}{2-1} = 1$$

نیز π جہن لا جم رلا فرلا = . اگر $n \neq r$

اِس لئے اگر سلسلہ کو جہن رلا کے ساتھ ضرب دیکر مکمل کیا جائے تو ہر رقم صفر ہو جائے گی سوائے $\frac{1}{2}$ جہن رلا جہن رلا کے، اِس طرح حاصل ہوگا

$$\pi = \frac{1}{2-1} = \frac{1}{2-1} = \frac{1}{2-1} = \dots \quad (1)$$

$$\frac{1}{2-1} = \frac{1}{2-1} = \frac{1}{2-1} = \dots$$

اسے $\frac{1}{2}$ کی قوتوں میں پھیلا یا جاسکتا ہے۔ یا (۱) میں $\frac{1}{2}$ کی بجائے $\frac{1}{2}$ لکھ کر ہم $\frac{1}{2}$ سے ضرب دے سکتے ہیں۔ تھلہ کی قیمت ہوگی $\frac{1}{2-1}$

مشق ۱۳

۱۔ ثابت کرو کہ ذیل کے پھیلاؤ لا کی ہر محدود قیمت کے لئے درست ہیں

$$(1) \text{ جب } (n+1) = \text{ جب } n + \text{ جب } n - \text{ جب } n - \text{ جب } n + \dots$$

$$(2) \text{ جب } n = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots$$

(۴) $1 + \text{جم (الاجب ۷۷)} + \text{جم (الاجم ۷۷)} + \text{جم (الاجم ۷۷)} + \text{جم (الاجم ۷۷)} + \dots$

ثابت کرو کہ عفو = جو (الاجب عدا) = جو (الاجب عدا) = جو (الاجب عدا + ن عدا)

۲۔ سوال ۱، (۳) سے جنم لاجنم لا کجیز لاجب لا کجنز لاجبل لاجبنر لاجبر
کے یہ ملاؤ حاصل کرو۔

۳۔ ثبات کرو کہ اگر $a > 1$ تو

لو کہ $(1 + \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} + \frac{1}{3}) + (\frac{1}{3} + \frac{1}{4}) + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1}$

۴۔ جہاں تک رقیس پھیلاؤ میں دی گئی ہیں وہاں تک ثابت کر دے

$$\frac{41}{28} + \frac{5}{28} + \frac{1}{2} + 1 = 2 \text{ قط (1)}$$

$$\frac{1}{315} + \frac{1}{15} + \frac{1}{3} + 1 = 1.031746 \text{ مس ١}$$

$$\frac{r_{11}}{955} - \frac{r_{12}}{25} - \frac{r_{13}}{3} - 1 = \eta_{11}(s)$$

۳۵
۳۵
۹۴۵
جہم لا اور جب لا کی بجائے ان کے مرادف سلسلے رکھنے اور تقسیم کرنے سے یہ پھیلاؤ حاصل ہو سکتے ہیں۔ کیا ہم لا مکارن کے مسئلہ سے

پھیلا یا جاسکتا ہے؟ اگر لا انا چھوٹا ہو کہ اس کے مربے اور اعلیٰ قوتیں نظر انداز کر دی جاسکیں تو نجات کرو کہ

$$\frac{y_{100}}{100} - \frac{r}{2} = \left\{ \frac{y-1}{2} + \frac{y+1}{2} r \right\} - \left\{ \frac{y+1}{2} + \frac{y-1}{2} r \right\}$$

۶۔ اگر $f(لا) = \frac{لا}{۱}$ تو ثابت کرو کہ $f(لا) اور f(لا)$ کی انتہائیں $لا$ کے لئے بالترتیب ۱ اور $\frac{۱}{۲}$ ہیں۔ نیز مساوات $f(لا) - f(لا) = لا$ ۔

کون بار تفریق کرنے سے ثابت کرو کہ

$$\{f(لا) + f(لا) + \dots + f(لا) + f(لا)\} = f(لا)$$

اور اس لئے اگر $n > ۱$ تو

$$f(لا) + f(لا) + \dots + f(لا) + f(لا) = لا$$

جہاں $لا$ کے لئے تفاضلوں کی جو انتہائیں ہیں انہیں $لا = ۰$ پر ان کی قیمتیں متصور کیا جائے۔

$$۱ - \frac{لا}{۲} = \frac{لا}{۲} - \frac{لا}{۳} + \frac{لا}{۳} - \frac{لا}{۴} + \dots$$

$$ثابت کرو کہ $\frac{لا}{۲} = \frac{لا}{۳} = \frac{لا}{۴} = \dots$

جہاں $\frac{لا}{۲} = \frac{لا}{۳} = \frac{لا}{۴} = \dots$ کے اعداد ہیں (ملاحظہ ہو کرشل کا جبر و مقابلہ، حصہ دوم، باب ۲۸، دفعہ ۶)$$

$$۸۔ ثابت کرو کہ $\frac{لا}{۲} = \frac{لا}{۳} - \frac{لا}{۴} + \frac{لا}{۵} - \frac{لا}{۶} + \dots$$$

$$- \frac{لا}{۶} + \frac{لا}{۷} - \frac{لا}{۸} + \dots$$

۹۔ اگر $f(n) = \frac{n^2 - 1}{n^2}$ جب n تو ثابت کرو کہ

$$f(1) - f(2) + f(3) - f(4) + \dots = 1$$

اور اگر $n > 1$ تو

$$\frac{n^2 - 1}{n^2} = \frac{n^2 - 1}{n^2} + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2} - \dots$$

۱۰۔ سوال ۹ سے ثابت کرو کہ

$$(1) \quad \frac{n^2 - 1}{n^2} = \frac{n^2 - 1}{n^2} + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2} - \dots$$

$$(2) \quad \frac{n^2 - 1}{n^2} = \frac{n^2 - 1}{n^2} + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2} - \dots$$

رکھو $n = 1$ جب n میں $n = 1$

۱۱۔ سوال ۹ سے بذریعہ عمل تکمیل حاصل کرو کہ اگر $n > 1$ تو

$$\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^2} + \dots$$

۱۲۔ ثابت کرو کہ جم $(\frac{n^2 - 1}{n^2})$ مساوات (۳) دفعہ ۴ کو پورا کرتی ہے اور ثابت کرو کہ

اگر $n > 1$ تو

$$\text{جم } (\frac{n^2 - 1}{n^2}) = 1 - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^2} + \dots$$

۱۳۔ جب $(\frac{n^2 - 1}{n^2})$ اور جم $(\frac{n^2 - 1}{n^2})$ کے سلسلہ سے ثابت کرو کہ

$$(1) \quad \frac{n^2 - 1}{n^2} = \frac{n^2 - 1}{n^2} + \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2} - \dots$$

$$(۲) \text{ جم } ۳ طہ = ۱ - \frac{۲۰}{۲۱} \text{ جب } طہ + \frac{۲۰(۲۰-۲)}{۲۱} \text{ جب } طہ - \dots$$

جم ۳ طہ، جب ۳ طہ کے لئے سلسلے جب (۱ جب ۱) اور جم (۱ جب ۱) جم طہ جم طہ کو تفرق کرنے سے حاصل ہو سکتے ہیں۔
۱۴۔ اگر $1 > 1$ تو ثابت کرو کہ

$$(۱) \text{ لوگ } \left\{ (۱) + (۱) \right\} = \frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۴} - \frac{۱}{۵} + \dots$$

$$+ \frac{۱}{۶} - \frac{۱}{۷} + \frac{۱}{۸} - \frac{۱}{۹} + \dots$$

$$(۲) \frac{۱}{۲} = \left\{ (۱) + (۱) \right\} = \frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۴} - \frac{۱}{۵} + \dots$$

$$+ \frac{۱}{۶} - \frac{۱}{۷} + \frac{۱}{۸} - \frac{۱}{۹} + \dots$$

۱۵۔ اگر $1 > 1$ تو ثابت کرو کہ

$$(۱) \text{ کو جب } ۱ = ۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۴} + \dots$$

$$+ \frac{۱}{۵} - \frac{۱}{۶} + \frac{۱}{۷} - \frac{۱}{۸} + \dots$$

$$(۲) \left\{ (۱) + (۱) \right\} = ۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۴} + \dots$$

$$+ \frac{۱}{۵} - \frac{۱}{۶} + \frac{۱}{۷} - \frac{۱}{۸} + \dots$$

استدقاق ثابت کرنے کے لئے ملاحظہ ہو کہ ہر دو (۱) اور (۲) میں طاق رقموں کے

لینے سے جو سلسلے بنتے ہیں اور حقیقت رقموں کے لینے سے جو سلسلے بنتے ہیں وہ جملہ اگانہ مستحق ہیں یا مستحق بموجب اسکے کہ الا کم ہو یا بڑا ہو ایک ہے۔
۱۶۔ معمولی ترقیم کے مطابق ثابت کرو کہ ناقص کا محیط

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \right) - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} \right) - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{4} \right) - \dots = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \right) - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3} \right) - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{4} \right) - \dots$$

$$\left\{ \dots - \frac{1}{5} \left(\frac{1}{5} \right) - \frac{1}{6} \left(\frac{1}{6} \right) - \dots \right\}$$

۱۷۔ ثابت کرو کہ (۱) چھوٹے خروج المکرز زوائے ایک ناقص کا گھیرا مساوی رقبہ والے ایک دائرہ کے گھیرے سے تقریباً اس نسبت $1 + \frac{3}{64}$ سے بڑا ہوتا ہے
(۲) ایک گردش ناقص نما (خواہ یہ چپٹا ہو یا لمبوتر) جس کا خروج ز چھوٹا ہو اسکی سطح منحنی مساوی حجم والے ایک کرہ کی سطح منحنی سے بقدر اپنی کسر $\frac{3}{64}$ کے زیادہ ہوتی ہے۔

۱۸۔ $\frac{\text{جم طہ} + \text{لا}}{\text{جم طہ} + \text{لا}}$ کو پہلے بلحاظ لا کے پھر بلحاظ طہ کے مکمل کرنے سے (ملاحظہ ہو مشق ۱۲، ۱۳) ثابت کرو کہ اگر $\frac{\text{لا}}{\text{لا}} > 1$ تو

$$(1) \frac{1}{4} \text{ لوک } (1 + 2 \text{ لا جم طہ} + \text{لا}) = \text{لا جم طہ} - \frac{1}{4} \text{ لا جم طہ}$$

$$+ \frac{1}{3} \text{ لا جم طہ} - \dots$$

$$(2) \text{ مس } \left(\frac{\text{لا جم طہ}}{1 + \text{لا جم طہ}} \right) = \text{لا جم طہ} - \frac{1}{4} \text{ لا جم طہ} + \frac{1}{3} \text{ لا جم طہ} - \dots$$

۱۹۔ مثال ۱۸ سے لا کے لئے انتہا لینے سے ثابت کرو کہ اگر $\frac{\text{لا}}{\text{لا}} > 1$

تو (۱) $\text{جم } \pi - \frac{1}{2} \text{ جم } \pi + \frac{1}{3} \text{ جم } \pi - \dots = \text{لوک } (\frac{1}{2} \text{ جم } \pi)$

(۲) $\text{جب } \pi - \frac{1}{2} \text{ جب } \pi + \frac{1}{3} \text{ جب } \pi - \dots = \frac{1}{2} \pi$

ثابت کرو کہ سلسلہ (۲) تفاعل $\frac{1}{2} \pi$ کو صرف اُسی حالت میں تعبیر کرتا ہے

جبکہ $\pi > \pi > \pi$ اور سلسلہ کی قیمت جبکہ $\pi = \pi$ صفر ہے لیکن $\pi < \pi$ کے لئے سلسلہ کی انتہا $\frac{1}{2} \pi$ ہے۔

نیز ثابت کرو کہ اگرچہ اوپر کے دونوں سلسلے مستحق ہیں لیکن ان میں سے کوئی بھی رقم برفم تفریق نہیں ہو سکتا (مشق ۱۲، ۱۵)

۲۰۔ مثال ۱۹ میں π سادی $\pi - \pi$ لا رکھنے سے حاصل کرو کہ اگر $\pi > \pi$

تو (۱) $\text{جم } \pi + \frac{1}{2} \text{ جم } \pi + \frac{1}{3} \text{ جم } \pi + \dots = \text{لوک } (\frac{1}{2} \text{ جب } \pi)$

(۲) $\text{جب } \pi + \frac{1}{2} \text{ جب } \pi + \frac{1}{3} \text{ جب } \pi + \dots = \frac{1}{2} \pi - \frac{1}{2} \pi$

۲۱۔ سوال ۲۰ (۲) کو مکمل کرنے سے ثابت کرو کہ اگر $\pi \geq \pi$ تو

$$\frac{1}{2} \pi - \frac{1}{2} \pi = \left(\frac{1}{2} \text{ جم } \pi + \frac{1}{3} \text{ جم } \pi + \frac{1}{4} \text{ جم } \pi + \dots \right) - \left(\frac{1}{2} \text{ جب } \pi + \frac{1}{3} \text{ جب } \pi + \frac{1}{4} \text{ جب } \pi + \dots \right)$$

جہاں $\text{جم } \pi = \frac{1}{2} \pi + \frac{1}{3} \pi + \frac{1}{4} \pi + \dots$

سلسلہ لا کی ہر قیمت کے لئے یکساں طور پر مستحق ہے، اس لئے مکمل کے بعد ہم لا کو قیمتیں صفر اور π دے سکتے ہیں، لیکن یہ فوری سلسلہ ہے اور وقفہ

(۰، π) کے باہر تفاعل $\frac{1}{2} \pi - \frac{1}{2} \pi$ کو تعبیر نہیں کرتا۔

۲۲۔ سوال ۲۱ سے حاصل کرو کہ

$$\frac{1}{2} \pi = \frac{1}{2} \pi + \frac{1}{3} \pi + \frac{1}{4} \pi + \dots \quad (۱) \quad \frac{1}{2} \pi = \frac{1}{2} \pi + \frac{1}{3} \pi + \frac{1}{4} \pi + \dots \quad (۲)$$

$$\frac{2\pi}{12} = \dots + \frac{1}{23} - \frac{1}{23} + \frac{1}{24} - \frac{1}{24} \quad (3)$$

(۱) حاصل کرنے کے لئے سوال ۲۱ میں رکھو لا = π (۲) اور (۳) آسانی حاصل ہوتے ہیں (ملاحظہ ہو مشق ۱۲، سوال ۳)
۲۳۔ ثابت کرو کہ

$$(1) \quad \frac{1}{2} \log \frac{1}{2} \text{ لوگ } (1+لا) \text{ فر } لا = \dots - \frac{1}{23} + \frac{1}{24} - \frac{1}{24} = \frac{2\pi}{12}$$

$$(2) \quad \frac{1}{2} \log \frac{1}{2} \text{ لوگ } (1-لا) \text{ فر } لا = \dots + \frac{1}{23} + \frac{1}{24} + \frac{1}{24} = \frac{2\pi}{12}$$

$$(3) \quad \frac{1}{2} \log \frac{1}{2} \text{ مس طہ لوگ } (م طہ) \text{ فر طہ} = \dots + \frac{1}{23} - \frac{1}{23} + \frac{1}{24} - \frac{1}{24} = \frac{2\pi}{12}$$

(۳) حاصل کرنے کے لئے رکھو مس طہ = لا اور یاد رہے کہ یہاں لا لوگ لا ہے۔
(مشق ۷ سوال ۱۔ حصہ اول)

۲۴۔ ثابت کرو کہ

$$(1) \quad \frac{1}{2} \log \frac{1}{2} \text{ جم لا } \frac{1}{2} \log \frac{1}{2} \text{ جم لا } \frac{1}{2} \log \frac{1}{2} \text{ جم لا } \frac{1}{2} \log \frac{1}{2} \text{ جم لا } \frac{1}{2} \log \frac{1}{2} \text{ جم لا} = \dots + \frac{1}{23} - \frac{1}{23} + \frac{1}{24} - \frac{1}{24} = \frac{2\pi}{12}$$

$$(2) \quad \frac{1}{2} \log \frac{1}{2} \text{ جم لا } \frac{1}{2} \log \frac{1}{2} \text{ جم لا } \frac{1}{2} \log \frac{1}{2} \text{ جم لا } \frac{1}{2} \log \frac{1}{2} \text{ جم لا} = \dots + \frac{1}{23} + \frac{1}{24} + \frac{1}{24} = \frac{2\pi}{12}$$

(۱) میں $\pi - \pi \geq لا \geq 0$ (۲) میں $\pi \geq لا \geq 0$

۲۵۔ ثابت کرو کہ لا کی ہر محدود قیمت کے لئے

$$(1) \quad \frac{1}{2} \log \frac{1}{2} \text{ جم } (لا \text{ جم طہ}) \text{ فر طہ} = 1 - \frac{1}{23} + \frac{1}{24} - \frac{1}{24} + \frac{1}{24} - \frac{1}{24} + \dots$$

$$(۲) \frac{1}{\pi} \text{ جب } (لاجم طه) \text{ جب } طه در طه = \frac{(۲۲)}{(۲+۲)} - ۱ = \frac{(۲)}{(۲+۲)}$$

$$+ \frac{1}{(۲+۲)(۲+۲) \times ۲} + \dots$$

۲۶۔ اگر سوال ۲۵ (۱) میں ماسلسلہ (یا تکملہ) کو تعبیر کرے تو ثابت کر دے کہ

$$\frac{۲}{۲} + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} = ۰$$

۲۷۔ اگر سوال ۲۵ (۲) میں ماسلسلہ (یا تکملہ) کو تعبیر کرے اور اگر $ما = لا$ تو ثابت کر دے کہ

$$\frac{۲}{۲} + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} = ۰$$

ما، رتبه رکابلیسکی کا تفاعل کہلاتا ہے اور (سوال ۱) ایک عددی فروض پر مبنی ہے اسے ہم بالعموم جبر (لا) سے تعبیر کریں گے۔ سوال ۲۶ کا تفاعل 'جے' (لا) ہے [ملاحظہ ہوں کہ 'جے' اور 'مستحب' کے بلیسکی تفاعل]

۲۸۔ اگر مثبت صحیح ہو تو ثابت کر دے کہ

جب لا (۱+۲) جم ۲ + لا (۲+۳) جم ۳ + + لا (۲+۳) جم ۲ = جب (۱+۲) لا اور اس سے پھر ثابت کر دے کہ

$$\frac{1}{\pi} \text{ جب } (۱+۲) لا = \frac{۱}{\pi}$$

۲۹۔ ذیل کے نتائج ثابت کر دے اور مثبت صحیح ہے۔

$$(۱) \text{ لوک } (۱-۲) \text{ جم } لا + (۲) \text{ فر } لا = ۰ \text{ اگر } لا > ۱$$

$$۲ = \pi \text{ لوک } لا \text{ اگر } لا < ۱$$

$$(۲) \text{ لا جب } لا \text{ فر } لا = \frac{\pi}{۱} \text{ لوک } (۱+۱) لا \text{ اگر } لا > ۱$$

$$\frac{\pi}{d} = \text{لوک } (1 + \frac{1}{d}) \text{ اگر } d < 1$$

$$(3) \text{ مگر جب } d > 1 \text{ ہو تو } \frac{\pi}{d} = \text{لوک } (1 + \frac{1}{d}) \text{ فرما} = \frac{\pi}{d} \text{ اگر } d > 1$$

$$= \frac{\pi}{d} \text{ اگر } d < 1$$

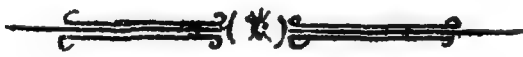
$$(4) \text{ مگر جب } d > 1 \text{ ہو تو } \frac{\pi}{d} = \frac{\pi}{d} \text{ اگر } d > 1$$

$$= \frac{\pi}{d} \text{ اگر } d < 1$$

$$3. \text{ ثابت کرو کہ } (1) \text{ مگر جب } d > 1 \text{ ہو تو } \frac{\pi}{d} = \frac{\pi}{d} \text{ اگر } d > 1$$

$$(2) \text{ مگر جب } d < 1 \text{ ہو تو } \frac{\pi}{d} = \frac{\pi}{d} \text{ اگر } d < 1$$

$$(2) \text{ حاصل کرنے کے لئے } \frac{\pi}{d} \text{ کو اس شکل میں رکھو اور پھر دیکھو۔}$$



باب ہفتم

ٹیلر کا مسئلہ ویا زیادہ متغیروں کے تفاعلوں کی صورت میں۔ اس مسئلہ کا استعمال

۴۸۔ دو یا زیادہ متغیروں کے تفاعلوں کے لئے ٹیلر کا مسئلہ۔ ایک سے زیادہ

متغیروں کی صورت میں اب ہم مختصر طور پر ایسے پھیلاؤ حاصل کریں گے جو ٹیلر کے مسئلہ کے جواب میں ہے۔ باقیات کے لئے جملے پیچیدہ ہیں، انہیں نہیں لکھا جائیگا اگرچہ انکی شکل کا اندازہ سلک ثبوت سے باسانی ہو سیکے گا۔ اگر ہم باقیوں کی کوئی مناسب بحث سمجھنا اختیار کریں تو جبریہ صورتوں کے نظریہ میں بہت دور تک ہم چلے جائیں گے۔ یہاں یہ تسلیم کر لیا جائے گا کہ تفاعل اور ان کے تمام مشتق جو باقی تک اور باقی میں شریک ہوئے ہیں وہ سب کے سب مسلسل ہیں۔

سب سے پہلے ہم ف (لا + ہ، ما + گ) کا پھیلاؤ دھ اور گ کی قوتوں میں حاصل کریں گے یہ پھیلاؤ دفعہ ۴۳ کے ضابطہ (۱۳) کا جواب ہے۔

ف (لا + ہ، ما + گ) تفاعل ف (لا + ہ، ت + گ) کی قیمت بحکمت = ۱،

اب اگر ف (لا + ہ، ت + گ) کو ت کا تفاعل خیال کیا جائے تو اسے ہم مشکل اردن کے مسئلہ سے پھیلا سکتے ہیں۔ اختصار کی خاطر

ف (لا + ہ، ت + گ) کو ف (ت) سے تعبیر کرو اور اسکے مشتق کو زبروں سے بیان کرو۔ تب

ف (ت) = ف (ان) + ت ف (ان) + $\frac{t^2}{2!}$ ف (ان) + ... + حبس (ت) + ... (۱)

اب ہم یہ دیکھیں گے کہ فآرت کے ت مشتق لا، ما کے لحاظ سے فآرت کے
جزوی مشتقوں میں کس طرح بیان ہو سکتے ہیں۔

رکھو لا + ھت = ھما، ما + کت = یتا..... (۲)

تب فآرت = $\frac{\text{جف فا}}{\text{جف لا}} + \frac{\text{جف فا}}{\text{جف ما}} + \frac{\text{جف فا}}{\text{جف ھت}} = \frac{\text{جف فا}}{\text{جف ھما}} + \frac{\text{جف فا}}{\text{جف یتا}}$

+ $\frac{\text{جف فا}}{\text{جف یتا}}$ (۳)

لیکن $\frac{\text{جف فا}}{\text{جف لا}} = \frac{\text{جف فا}}{\text{جف ھما}} \times \frac{\text{جف ھما}}{\text{جف لا}}$ کیونکہ (۲) سے

$\frac{\text{جف ھما}}{\text{جف لا}} = ۱$ اور اسی طرح $\frac{\text{جف فا}}{\text{جف ما}} = \frac{\text{جف فا}}{\text{جف یتا}}$

اس طرح رشتہ (۳) ہو جاتا ہے

فآرت = $\frac{\text{جف فا}}{\text{جف لا}} + \frac{\text{جف فا}}{\text{جف ما}} + \frac{\text{جف فا}}{\text{جف یتا}}$ (۴)

رابطہ (۴) کا مطلب شاید انہی طرح سمجھیں آئیگا اگر کسی خاص صورت پر غور کیا جائے

مثلاً فآرت = (لا + ھت) (ما + کت)۔ اس جملہ کے ساتھ اوپر کا سلوک کرے

سے فآرت معلوم کیا جائے، اس طرح معلوم ہو گا کہ

فآرت بھی لا + ھت اور ما + کت کا تفاعل ہے اور اس لئے

فآرت حسب ذیل طریقہ سے معلوم ہو سکتا ہے۔

اب فآرت تفاعل فآرت کا ت مشتق ہے اور (۴) میں

فآرت کی بجائے فآرت رکھنے سے حاصل ہو سکیگا۔ پس

فآرت = $\frac{\text{جف فا}}{\text{جف لا}} + \frac{\text{جف فا}}{\text{جف ما}}$

$$= \{ \text{ہ} \text{ جف}^2 \text{ فا} + \text{ک} \text{ جف}^2 \text{ فا} \} + \{ \text{ک} \text{ جف}^2 \text{ فا} + \text{ہ} \text{ جف}^2 \text{ فا} \} + \{ \text{ک} \text{ جف}^2 \text{ فا} + \text{ہ} \text{ جف}^2 \text{ فا} \}$$

$$= \text{ہ}^2 \text{ جف}^2 \text{ فا} + \text{ہ}^2 \text{ جف}^2 \text{ فا} + \text{ہ}^2 \text{ جف}^2 \text{ فا} + \text{ک}^2 \text{ جف}^2 \text{ فا} + \text{ک}^2 \text{ جف}^2 \text{ فا} + \text{ک}^2 \text{ جف}^2 \text{ فا} \dots (5)$$

$$\text{اسی طرح فارت} = \text{ہ}^3 \text{ جف}^3 \text{ فا} + \text{ہ}^3 \text{ جف}^3 \text{ فا} + \text{ہ}^3 \text{ جف}^3 \text{ فا} + \text{ک}^3 \text{ جف}^3 \text{ فا} + \text{ک}^3 \text{ جف}^3 \text{ فا} + \text{ک}^3 \text{ جف}^3 \text{ فا}$$

$$+ \text{ہ}^3 \text{ جف}^3 \text{ فا} + \text{ہ}^3 \text{ جف}^3 \text{ فا} + \text{ہ}^3 \text{ جف}^3 \text{ فا} + \text{ک}^3 \text{ جف}^3 \text{ فا} + \text{ک}^3 \text{ جف}^3 \text{ فا} + \text{ک}^3 \text{ جف}^3 \text{ فا} \dots (6)$$

شتیق کی ترکیب کا قانون اب صاف ظاہر ہے، ابھی ہم دیکھیں گے کہ فارت کی قیمت کس طرح منضبط شکل میں لکھی جاسکتی ہے، مگر اس سے پہلے ہم فار، فارت، فارت کی قیمتوں پر غور کرتے ہیں۔

فار، = ف (لا، ما) اور فار، = فارت، = فارت، کی قیمتیں (۴)، (۵)، (۶) میں فارت کی بجائے محض ف (لا، ما) رکھنے سے حاصل ہو سکتی ہیں۔

باقی کی لنگر انج کی شکل حاصل کرنے کے لئے ہمیں فارت، میں ت کی بجائے

طہات رکھنا پائے جہاں طہ کسر واجب ہے، اگر ت = ۳ تو (۶) میں فارت کی بجائے ہمیں ف (لا، ما، طہات، ما، ک طہات) رکھنا ہوگا۔

اس طرح ربط (۱) ہو جائیگا

$$\text{ف (لا، طہات، ما، ک ت)} = \text{ف (لا، ما، ت)} + \text{ہ}^2 \text{ جف}^2 \text{ فا} + \text{ک}^2 \text{ جف}^2 \text{ فا} + \text{ہ}^2 \text{ جف}^2 \text{ فا} + \text{ک}^2 \text{ جف}^2 \text{ فا} + \text{ہ}^2 \text{ جف}^2 \text{ فا} + \text{ک}^2 \text{ جف}^2 \text{ فا}$$

$$+ \text{ہ}^2 \text{ جف}^2 \text{ فا} + \text{ہ}^2 \text{ جف}^2 \text{ فا} + \text{ہ}^2 \text{ جف}^2 \text{ فا} + \text{ک}^2 \text{ جف}^2 \text{ فا} + \text{ک}^2 \text{ جف}^2 \text{ فا} + \text{ک}^2 \text{ جف}^2 \text{ فا} \dots (7)$$

ت (لا + ہ + ما + ک) کا پھیلاؤ حاصل کرنے کے لئے (۷) میں ت کی بجائے ایک لکھی

ف (لا + ہ + ما + ک) = ف (لا + ما) + ہ جف لا + ک جف ف

+ $\frac{1}{2}$ (ہ جف لا + $\frac{2}{3}$ جف ف + $\frac{1}{3}$ ک جف ف + $\frac{1}{6}$ جف ف)

(۸) سے مطلوبہ پھیلاؤ حاصل ہوتا ہے، پھیلاؤ (۷) بھی نہایت کارآمد ہے۔

فأ (ت) 'فأ (ت) کی جہتیں (۵) اور (۶) میں لکھی گئی ہیں وہ رموز

کے پیرایہ میں زیادہ منضبط شکل میں اس طرح لکھی جاسکتی ہیں

(ہ جف لا + ک جف ف) فأ (ہ جف لا + ک جف ف) فأ (۹)

بشرطیکہ ان کا یہ مفہوم ہمارے پیش نظر رہے، مفہوم۔

جملہ ثنائی کو پھیلا دیا جائے گا، ہ جف لا اور ک جف ف مفرد مقدار میں

ہیں، پھیلاؤ کے بعد ہر رقم کے ساتھ آخر میں فأ کو بطور جزو ضربی کے لکھا جائے

پھر اس طرح کی رقم ۳ (ہ جف لا) (ک جف ف) فأ کی بجائے

پہلے ۳ ہ ک جف ف فأ پھر ۳ ہ ک جف ف فأ لکھا جائے

اس ترتیب کے موافق (۷) میں (۴ + ۱) دیں رقم ہوگی

ت $\frac{1}{2}$ (ہ جف لا + ک جف ف) فأ

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{2} \text{ جف} + \frac{2}{2} \text{ جف} + \frac{1}{2} \text{ جف} + \frac{1}{2} \text{ جف} + \dots \right)$$

$$\dots + \frac{1}{2} \text{ جف} + \frac{1}{2} \text{ جف} + \dots$$

شکل (۸) میں لا کی بجائے ھ اور ما کی بجائے گ رکھنے سے ف (لا + ھ، ما + گ) کا پھیلاؤ لا، ما کی قوتوں میں مائل ہو سکتا ہے، لاحقوں والی ترقیم استعمال کرنے سے ف (لا + ھ، ما + گ) = ف (ھ، گ) + لا ف + ما ف

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \text{ لا ف} + \frac{1}{2} \text{ لا ما ف} + \frac{1}{2} \text{ ما ف} + \dots \right)$$

ف، ھ مرتب کرنے کے لئے ہیں ف (لا، ما) کو لحاظ لا اور ما کے تفرق کرنا چاہئے اور پھر لا کی بجائے ھ اور ما کی بجائے گ رکھنا چاہئے (۱۰) میں اگر ہم چاہیں تو رکھ سکتے ہیں ھ = .، گ = .، اس طرح ہمیں ف (لا، ما) کا پھیلاؤ سکالارن کے مسئلہ کے جواب میں ملے گا۔ اگر متغیر تین یا زیادہ ہوں تو پھیلاؤ اسی شکل کے ہونگے جو اوپر حاصل ہوئے، مثلاً تین متغیروں کی صورت میں

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \text{ لا ف} + \frac{1}{2} \text{ لا ما ف} + \frac{1}{2} \text{ ما ف} + \dots \right)$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \text{ لا ف} + \frac{1}{2} \text{ لا ما ف} + \frac{1}{2} \text{ ما ف} + \dots \right)$$

$$\dots + \frac{1}{2} \text{ لا ف} + \frac{1}{2} \text{ لا ما ف} + \dots$$

جہاں رموزی جملات کی تفسیر وہی ہے جو اوپر بیان ہوئی۔

۲۹ - مثالیں (۱) سطح ف (لا، ما، ہی) = کے نقطہ
(ن، ہ، گ، ل) پر ہمسی ستوی سطح کی مساوات معلوم کرو۔
ن میں سے گزرنے والے کسی خط مستقیم کی مساواتیں جسکی جیوب التمام
لہ، مہ، نہ، ہوں یہ ہیں

$$\frac{لا-ہ}{لہ} = \frac{ما-ک}{مہ} = \frac{ہی-ل}{نہ} = \dots\dots\dots (۱)$$

جہاں ر فاصلہ ہے (لا، ما، ہی) کا (ہ، گ، ل) سے۔ فرض کرو کہ
(لا، ما، ہی) سطح پر کا نقطہ ق ہے۔ تب لا = ہ + لہ،
ما = ک + مہ، ہی = ل + نہ، ر ف (لا، ما، ہی) = (ہ، گ، ل)
ف (لا، ما، ہی) =۔ میں لا، ما، ہی کی بجائے اوپر کی قیمتیں نہج
کرنے اور ٹیلر کے مسئلہ سے پھیلانے سے

$$= ف (ہ، گ، ل) + ر (لہ ف + مہ ف + نہ ف)$$

+ ط ر + (۲)
لیکن ف (ہ، گ، ل) =۔ کیونکہ ف سطح پر واقع ہے، اس لئے
ر کی ایک قیمت جو (۲) سے حاصل ہوتی ہے صفر ہے، (۲) کی باقی اہلیں
نقطہ ف سے ان فاصلوں کو تعبیر کرتی ہیں جہاں خط (۱) سطح سے ملتا ہے۔
فرض کرو کہ ہ = ف ق تب چونکہ ر صفر نہیں ہے، اس لئے مساوات
(۲) ہو جاتی ہے

$$= لہ ف + مہ ف + نہ ف + ط ر + (۳)$$

جیسے ہ صفر کی طرف مائل ہوتا ہے خط (۱) ماس کا محل اختیار کرتا ہے،
لیکن (۳) سے ظاہر ہے کہ جیسے ہ صفر ہوتا ہے لہ ف + مہ ف + نہ ف
بھی صفر ہوتا ہے۔

اگر (ا و ب) موثر قیمت ہو تو (ا) کے بائیں جانب کے جملہ کو ہر اور
کے کی تمام چھوٹی قیمتوں کے لئے دہی علامت قائم رکھنی چاہئے اگر (ا و ب)
قیمت اعظم ہو تو یہ علامت منفی ہونی چاہئے اگر یہ اقل ہو تو مثبت۔
جب میں ہر اور ک کی تیسری قیمتیں شریک ہونی ہیں جبکہ جب کو ٹیلر
کے مسئلہ کا باقی خیال کیا جائے، اس لئے ایک یا چند تک یہ خیال معلوم ہوتا ہے
کہ ہر اور ک کی کافی طور پر چھوٹی قیمتوں کے لئے بائیں جانب کے جملہ کی علامت
ہر 'ک کے دو درجی جملہ کی علامت سے متعین ہوگی۔ لیکن یہ مفروضہ پورے
طور پر سنا نہیں سیم لیا جائے اس کا ذیل کی مثال سے واضح ہوگا جسے پیش کرنے
پیش کرتا ہوں۔

ف (ا و ب) = (ا - ۲ - ۱) + ۲ + ۱

تب (ا و ب) = ف (ا و ب) = اور مساوات (۱) ہو جاتی ہے

ف (ا و ب) = (ا - ۲ - ۱) + ۲ + ۱ = (۲).....

یہاں ٹیک جب = (ا - ۲ - ۱) + ۲ + ۱ = (۲).....

درجہ دوم کی قیمتیں ۸ ہر میں تحویں ہو جاتی ہیں اور یہ مثبت ہے جب تک کہ ہر صفر نہ ہو
لیکن ہر 'ک کی تمام چھوٹی قیمتوں کے لئے ف (ا و ب) کی ایک ہی علامت نہیں
ہے کیونکہ فرض کر کہ ک = (ا - ۲ - ۱) + ۲ + ۱ = (۲).....

ف (ا و ب) = (ا - ۲ - ۱) + ۲ + ۱ = (۲).....

اس لئے ف (ا و ب) منفی ثابت ہوگا بموجب اس کے کہ لہ ۲ اور ۴ کے درمیان
واقع ہو یا نہ ہو۔ دوسرے الفاظ میں ف (ا و ب) متبادل ف (ا و ب) کی اقل قیمت
نہیں ہو سکتی خواہ دوسرے درجہ کی قیمتیں مثبت ہی کیوں نہ ہوں جب تک کہ ہر صفر نہ ہو تو
اوپر جو شکل پیدا ہوئی ہے، اسکی تحقیق کے لئے ٹیلر کے مسئلہ میں باقی کے مفروضہ
کی ضرورت ہوگی یہ پتا چلے گا کہ ف (ا و ب) کے عدد سے باہر ہے، اس جگہ صرف
اتنا بیان کر دینا کافی ہوگا کہ ف (ا و ب) موثر قیمت ہوگی اگر

ف (ا و ب) < ف (ا و ب)

اور یہ قیمت اعظم ہوگی اگر ف (یا فب) سنی ہو اور اقل ہوگی اگر ف (یا فب) مثبت ہو۔

ہم دیکھتے ہیں کہ اس امر کے لئے ضروری شرط کہ ف (یا فب، ج، فاعل ف (لا، ما، می) کے مور کی قیمت ہو یہ ہے، ف، فب، ف، ج میں ہر ایک کو صفر ہونا چاہئے جبکہ لا = ا، ما = ب، می = ج

کئی صورتوں میں یہ پہلے سے معلوم ہوتا ہے کہ تفاعل کے مور کی قیمت کا لا، ا وجود ہے، اور بالعموم اسے بغیر فرید ثبوت کے مان لیا جاتا ہے کہ متغیروں کی وہ قیمتیں جو تفاعل کے پہلے مشتقوں کو صفر بنادیں ان سے تفاعل کے مور کی قیمت معلوم ہوتی ہے۔

۵۔ اس سلسلہ کی مشہور صورتیں وہ ہیں جن میں تفاعل جسکے مور کی قیمتیں مطلوب ہوں دو تین یا زیادہ متغیروں کا تفاعل ہو اور متغیر خود ایک یا دو شرطی مساواتوں کے ذریعہ مربوط ہوں۔ ایسی صورتوں میں مناسب طرز عمل بالعموم یہ ہوگا۔ فرض کرو کہ تفاعل (مثلاً) چار متغیروں کا تفاعل ہے اور چار متغیروں میں دو شرطی ربط معلوم ہیں۔

ف = ف (لا، ما، می، ہ) (۱)

فب = ف (لا، ما، می، ہ) (۲) سمی (لا، ما، می، ہ) = (۳)

تھوڑی دیر کے لئے فرض کرو کہ می اور ہ مساواتوں (۲) اور (۳) سے لا، ما کی رقوم میں معلوم کر لئے گئے ہیں اور ان قیمتوں کو می، ہ کی بجائے (۱) میں مندرج کر دیا گیا ہے، اس طرح دو متبوع متغیروں لا، ما کا تفاعل بن جاتا ہے۔ فرض کرو کہ عفا، عفف، تفاعل، کے پہلے مشتق ہیں، اس مفروض کی بنا پر کہ اوپر کی قیمتیں مندرج کر دی گئی ہیں مور کی قیمت کے لئے

اب (۷) میں جف لا جف لا کے سر (۸) میں جف ہی اور جف ما جف کے سروں کے بالترتیب مساوی ہیں، ہم لا، ما کی قیمتیں اس طرح منتخب کرتے ہیں کہ یہ سر صفر ہوں (اور یہ بالعموم ممکن ہوگا)۔ ایسا کرنے سے عفا، عفا کے لئے جو جملے ہیں ان میں صرف پہلی تین رقمیں رہ جاتی ہیں۔

د کے موڑ کی قیمتوں کے لئے عفا، عفا، صفر ہوں گے، اس لئے سوڑ کی قیمتوں کے لئے ذیل کی چار مساواتیں درست ہوں گی

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{ف} + \text{لا} + \text{فہ} + \text{ما} = \text{سا} \\ \text{فا} + \text{لا} + \text{فہ} + \text{ما} = \text{سا} \\ \text{فی} + \text{لا} + \text{فہ} + \text{ما} = \text{سا} \\ \text{فہ} + \text{لا} + \text{فہ} + \text{ما} = \text{سا} \end{array} \right. \quad (۹) \dots\dots\dots$$

یہ چار مساواتیں (۲)، اور (۳) کے ساتھ ملکر لا اور ما معلوم کرنے کے لئے نیز لا، فا، ہی، ہ کی وہ قیمتیں معلوم کرنے کے لئے جن سے د کے موڑ کی قیمتیں معلوم ہوتی ہیں عین کافی ہوں گی۔ مساواتیں (۹)، لا، فا، ہی، ہ میں متشاکل ہیں اور یہ طریقہ خاص طور پر سوزوں ہوتا ہے جبکہ ف، فہ، سا متجانس ہوں، یہ غیر معین ضاربوں کا طریقہ کہلاتا ہے۔ اوپر ہم نے صرف چار متغیر اور دو شرطی مساواتیں لی ہیں، ظاہر ہے کہ استدلال بالکل عام ہے۔ مساواتیں (۹) باسانی اس قاعدہ سے لکھی جاسکتی ہیں۔ مرتب کرو

فر + لہ + فرما + مہا فرسا اور فرلا + فرما + فری + فرہ کے
سروں کو صفر کے مساوی لکھو۔

درف سے مراد فر + فرلا + فہ فرما + فہ فری + فہ فرہ ہے
ایسا ہی فرما اور فرسا کا مفہوم ہے۔

مثال ۱۔ ۱ = لا + ما + می (۱) ، فدا = لا + ب + ما + ج + می (۲)۔

صحیحاً د کی کم سے کم قیمت کا وجود ہے کیونکہ لازماً مثبت ہے اور (۲) کی بنا پر
لا + ما + می ایک ساتھ صفر نہیں ہو سکتے۔ اب

فر + لہ + فرما = (۲ لا + لہ + فرلا) + (۲ ما + لہ + ب) + (۲ می + لہ + ج) فری
فرلا + فرما + فری کے سر صفر کرنے سے لا + ما + می کی وہ قیمتیں جن کے
لے و اقل ہے ذیل کی مساواتوں سے حاصل ہوتی ہیں۔

$$\frac{لا}{۱} = - \frac{لہ}{۲} = \frac{ما}{ب} = \frac{می}{ج}$$

(۲) کی رو سے ان میں سے ہر کسر = $\frac{ک}{لا + ب + ج}$

طالب علم اس مثال کو اس طرح سے بھی حل کر سکتا ہے کہ (۲) سے

جو می کی قیمت (ک - لا - ب + ما) حاصل ہوتی ہے اسکو (۱) میں

پہلے درج کر لیا جائے، لیکن اس طریقہ سے جو لا کی قیمت معلوم ہوگی اسکو
پہلے طریقہ سے لا کے ساتھ ملتیس نہ کیا جائے۔

مثال ۲۔ ۱ کے موڑ کی قیمتیں معلوم کرو

$$۱ = لا + ب + ما + ج + می \dots \dots (۱)$$

مشق ۱۴

۱۔ ذیل کے تجانس تفاعلوں کے متعلق آئٹلر کے مسئلہ کی تصدیق کرو (صرف پہلے مشتقوں کے لئے)

$$(۱) \text{ لا + لا } \text{ب لا} + \text{ج ما} \quad (۲) \text{ لا + لا } \text{ب ما} + \text{ج ہی}$$

$$(۳) \text{ لا + لا } \text{ما + ما} + \text{ما ہی} \quad (۴) \frac{\text{لا + ما}}{\text{لا + ما}}$$

$$(۵) \frac{\text{لا + ما + ہی}}{\text{لا + ما + ہی}} \quad (۶) \text{مس (ہی) جہاں رہا لا + ما + ہی}$$

$$(۷) \frac{1}{\text{لا}}$$

۲۔ دیکھو کہ یہاں کا تجانس تفاعل ہے، ثابت کرو کہ

$$(۱) \text{ لا } \text{لا} + \text{ما} \text{لا} = (\text{ن} - ۱) \text{لا}$$

$$(۲) \text{ لا } \text{لا} + \text{ما} \text{ما} = (\text{ن} - ۱) \text{ما}$$

۳۔ اگر مثبت ہو تو ثابت کرو کہ ۱ لا + لا - لا - ما - ما اعظم ہے

جبکہ لا = ۱، ما = ۱ لیکن اگر لا = ۱، ما = ۱ تو یہ اقل ہے نہ اعظم۔
۴۔ تفاعل لا + ما (۱ - لا - لا - ما) اعظم ہے جبکہ لا = ۱، ما = ۱ لیکن یہ اقل ہے نہ اعظم جب لا = ۱، ما = ۱۔

۵۔ اگر لا + ب + ج مثبت ہوں اور اگر $\frac{1}{\text{لا}} + \frac{\text{ب}}{\text{ما}} + \frac{\text{ج}}{\text{ہی}} = ۱$ تو ثابت کرو کہ حاصل جمع لا + ما + ہی اقل ہوگا جبکہ

کی اقل قیمت لا، ہا کی اُن قیمتوں سے حاصل ہوتی ہے جو ذیل کی مساواتوں کو پورا کرتی ہیں

$$= (ح ا ج) + (ح ا ب) + (ح ا ي)$$

(حزب) = (حزب) + (حزب) + (حزب) =

۱۱۔ ن نقاط معلومہ کا مرکز ہندسی وہ نقطہ ہے جس کے فاصلوں کے مربعوں کا مجموعہ ان نقاط سے کم سے کم ہو۔

۱۲۔ غیر معین ضابطوں کے قاعدہ سے قطع ناقص کے برہنجی کی مسادات دریافت کرو جبکہ برہنجی کو ناقص کے عمادوں کا لغات تصویر لیا جائے۔

عماد ہے $\frac{ز}{ع} - \frac{ب}{ع} = \frac{ز-ب}{ع}$

جہاں $1 = \frac{r_{بد}}{r_c} + \frac{r_{عم}}{r_d}$

اس لئے $-\frac{1}{2a} + \frac{1}{2a} = \frac{1}{2a} + \frac{1}{2a}$ ، $\therefore \frac{1}{2a} + \frac{1}{2a} = \frac{1}{a}$

اسکے لئے $\frac{1}{4} (a-b)^2 = c^2 - \frac{a^2}{4} - \frac{b^2}{4}$ وغیرہ۔

۳۱۔ ثابت کرو کہ لا عدد + ماہیہ = ازلہ کائنات جہاں عدد + بیہ = بی

$$-\frac{1}{4} \frac{z}{z^2-1} \left(\frac{1+z}{1-z} \right) = \frac{z}{z-1} + \frac{z}{z+1}$$

۵۲۔ غیر معین صورتیں۔ ممکن ہے کہ کوئی تفاعل ف (لا) کی

تعمین و جہاد ایل کی قیمتوں کی کسی سمت کے اندر عام طور پر بخوبی ہوتی ہو

و جب کسی خاص قیمت کے لئے ایسی شکل اختیار کرے (جیسے $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$) جو بے معنی ہو۔ لیکن ایسا ہو سکتا ہے کہ جب 'لا' مائل بہ 'لا' ہو تو ف (لا) کی ایک معین انتہا حاصل ہو۔ ف (لا) کی قیمت لا = کے لئے دراصل غیر معین ہے یعنی اس کی قیمت جبر و مقابلہ کے معمولی قاعدوں سے محسوب نہیں ہو سکتی تاہم یہ عام رواج ہو گیا ہے کہ ایسی حالت میں ف (لا) کو غیر معین صورت کے نام سے موسوم کرتے ہیں (اور بعض دفعہ کے طور پر انکھا $\frac{\text{لا}}{\text{لا}}$ کو ف (لا) کی قیمت خیال کرتے ہیں جبکہ لا = کے لئے تعامل کی اس قیمت کو جو تعریف کی بنا پر اختیار کی گئی ہے ہم ف (لا) کی "اصلی قیمت" کہتے ہیں جبکہ لا = کے لئے یاد رہے کہ یہ "اصلی قیمت" محض تعریف کی بنا پر لی گئی ہے اور اس لئے بالکل اختیاری ہے۔ لیکن اس طرز عمل میں ایک خاص فائدہ ہے اس طرح ف (لا) جو عام طور پر قیمت کے نام سے موسوم قیمت کے لئے مسلسل بن جاتا ہے۔

غیر معین صورتیں عام طور پر حسب ذیل ہیں:-

$$\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}, \infty, \infty - \infty, \infty \times 0, \infty, \infty, \infty, \infty$$

ایسی صورتوں میں سے بعض پہلے آئی ہیں، خوف (لا) کا شوق بصورت $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ ہے۔ لا لوک لا میں جبکہ لا = صورت $\infty \times 0$ پائی جاتی ہے، اصلی قیمت صفر ہے۔

$$\frac{\text{لا}}{\text{لا}} \text{ یا } \frac{\text{لا}}{\text{لا}} \text{ سے جبکہ لا = } \infty + \infty \text{ ملتا ہے } \infty \times 0 \text{ یا } \frac{\infty}{\infty}$$

اور انتہا صفر ہے [ملاحظہ ہو شوق، سوالات ۸، ۹ حصہ اول] یہ دیکھنا مشکل نہیں کہ نتیجہ درست رہتا ہے خواہ ف صحیح یا کمزور ہو۔

صورت ۱^{۰۰} پیدا ہوتی ہے جبکہ $\text{لا} = ۰$ ، $(۱ + \text{لا})$ میں، انتہایا اصلی قیمت

قوے (دفعہ ۲۸ نتیجہ صریح، حصہ اول) اکثر سوالوں میں یہ انتہائیں محض جبریہ استحالوں اور سلسلوں کے استعمال سے مائل ہو سکتی ہیں، عام مسائل کا سرسری ذکر کرنے سے پہلے ہم اس طرح کی چند مثالیں حل کریں گے۔

مثال ۱۔ $\frac{\text{لا} - ۱ + \frac{۱}{۲}(\text{لا} - ۱)}{\text{لا} - ۱ + \frac{۱}{۲}(\text{لا} - ۱)}$ جبکہ $\text{لا} = ۱$ ، صورت $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

شمار کنندہ اور نسب نامہ دونوں کو $(\text{لا} - ۱)$ پر تقسیم کرو۔ ہم دیکھتے ہیں کہ انتہا ۳ ہے، اسلئے کسر کی ”اصلی قیمت“ جبکہ $\text{لا} = ۱$ ، $\frac{۳}{۲}$ ہے۔

مثال ۲۔ $\frac{(\text{جب} \text{لا} - \text{لا})}{\text{لا}}$ جبکہ $\text{لا} = ۰$ ، صورت $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

جب لا کو پھیلاؤ $(= \text{لا} + \frac{\text{لا}^۲}{۲} + \dots)$ ، شمار کنندہ سے لا خارج ہو جاتا ہے اور شمار کنندہ اور نسب نامہ دونوں کو لا پر تقسیم کرنے سے انتہا $\frac{۱}{۲}$ حاصل ہوتی ہے۔

مثال ۳۔ $\frac{\text{قط} \text{لا}}{\text{قط} \text{لا}}$ جبکہ $\text{لا} = \frac{۱۱}{۲}$ ، صورت $\frac{\infty}{\infty}$

فرض کرو کہ $\text{لا} = \frac{۱۱}{۲}$ ، ز ، تب

$\frac{\text{نہا}}{\text{لا}} = \frac{\text{قط} \text{لا}}{\text{قط} \text{لا}} = \frac{\text{نہا}}{\text{ز}} = \frac{\text{جب} \text{لا}}{\text{جب} \text{لا}} = \frac{۳}{۲}$

مثال ۴۔ $\frac{۱}{\text{لا}}$ - $\frac{۱}{\text{م}}$ جبکہ $\text{لا} = ۰$ ، شکل $\infty - \infty$

فرض کرو کہ لا = $\frac{2}{3}$ - د تب

$$\text{نہا} = \frac{\text{قط لا}}{\text{قط ۳ لا}} = \frac{\text{نہا}}{\text{جب ۳ د}} = \frac{۳}{۳} = ۱$$

مثال ۴- $\frac{۱}{۲}$ - مم لا جبکہ لا = ۰، شکل $\infty - \infty$

$$\frac{۱}{۲} - \text{مم لا} = (۱ + \frac{\text{لا}}{\text{جب لا}}) \frac{\text{لا}}{\text{جم لا}} = \frac{\text{لا}}{\text{جم لا}} \frac{\text{لا}}{\text{جب لا}}$$

پہلے جزو ضربی کی انتہا ۲ ہے اور دوسرے کی ۱، نیز

$$\text{جب لا} - \text{لا جم لا} = \text{لا} - \frac{\text{لا}^۲}{۲} + \dots - \text{لا} (۱ - \frac{\text{لا}^۲}{۲} + \dots)$$

$$\dots + \frac{\text{لا}^۳}{۳} =$$

یعنی تیسرے جزو ضربی کی انتہا $\frac{۱}{۳}$ ہے، پس مطلوبہ انتہا یا اصلی قیمت $\frac{۲}{۳}$ ہے

مثال ۵- لا جبکہ لا = ۰، صورت :

فرض کرو کہ د = لا، تب لوک د = لا لوک لا
لا لوک لا یا لوک د کی انتہا صفر ہے، پس د یا لا کی انتہا ایک ہے۔

مثال ۶- $(\frac{۱}{لا})$ مس لا جبکہ لا = ۰، صورت ∞

تفاعل کا لوکارتم ہے مس لا لوک لا = - $\frac{\text{مس لا}}{\text{لا}}$ (لا لوک لا)

جس کی انتہا صفر ہے، اسلئے تفاعل کی انتہا ۱ ہے۔

۵۳- احصائی طریقہ - غیر معین صورتوں کی تحقیق کے متعلق

اب ہم عام مسئلہ بیان کرتے ہیں۔ ایسی نازک قیمتوں کے قرب میں ہم تفاعل

تسبب تسلیم کر لینگے۔
مسئلہ۔ اگر فدا (۱) اور سماء (۱) دونوں صفر ہوں یا دونوں لاتنا ہی اور
اگر فدا (۱) سماء (۱) ایک انتہا کی طرف مائل ہو جبکہ لا، کی طرف مائل ہو
تو فدا (۱) سماء (۱) بھی اسی انتہا کی طرف مائل ہوگا۔

تکرار سے پہنچنے کے لئے ابتداء میں ہی ہم اس امر کا ذکر کر دیتے ہیں کہ اگر فدا (۱) سماء (۱)
کی صورت غیر متعین ہو جبکہ لا = ۱ تو مسئلہ بالا سے ظاہر ہوتا ہے کہ اگر فدا (۱) سماء (۱)
ایک انتہا کی طرف مائل ہو جبکہ لا، کی طرف مائل ہو تو فدا (۱) سماء (۱) اور اسلئے
فدا (۱) سماء (۱) بھی اسی انتہا کی طرف مائل ہوگا، وغیرہ وغیرہ۔
دفعہ ۲، حصہ اول کے مسئلہ اوسط قیمت کی صورت ذیل کو ہم استعمال کرینگے
یہ شکل اس مسئلہ کی توسیع ہے۔

اگر فدا (۱) فدا (۱) سماء (۱) سماء (۱) مسلسل ہوں سعت
۱ \geq لا \geq ب کے لئے اور اگر سماء (۱) صفر نہ ہو جبکہ
۱ $>$ لا $>$ ب تو

$$\frac{\text{فدا (ب) - فدا (۱)}}{\text{سماء (ب) - سماء (۱)}} = \frac{\text{فدا (۱)}}{\text{سماء (۱)}} \dots \dots \dots (۱)$$

جہاں ۱ $>$ لا $>$ ب [اوسط قیمت کے مسئلہ کی تقسیم شدہ صورت]

اس کا ثبوت آسان ہے، فرض کرو کہ [ملاحظہ ہو دفعہ ۲، حصہ اول]

فَا (لا) = $\frac{\text{فنا (ب) - فنا (ا)}}{\text{سنا (ب) - سنا (ا)}}$ {سنا (لا) - سنا (ا)} - {فنا (لا) - فنا (ا)}
 اب فَا (ا) = ۰، فَا (ب) = ۰، اس لئے فَا (لا) = ۰، ہم سنا (لا) پر تقسیم کر سکتے ہیں کیونکہ سنا (لا) صفر نہیں ہے جب تک کہ لا، ا اور ب کے درمیان واقع ہوتا ہے۔

(۱) صورت $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ - فرض کرو کہ فنا (ا) = ۰، سنا (ا) = ۰،

(ا) میں رکھو ب کی بجائے لا۔ تب

$$\frac{\text{فنا (لا)}}{\text{سنا (لا)}} = \frac{\text{فنا (لا)}}{\text{سنا (لا)}} \quad (ا > لا > لا)$$

$$\frac{\text{ا نہ لا}}{\text{لا نہ لا}} = \frac{\text{فنا (لا)}}{\text{سنا (لا)}} = \frac{\text{فنا (لا)}}{\text{سنا (لا)}} = \frac{\text{فنا (لا)}}{\text{سنا (لا)}} = \frac{\text{فنا (لا)}}{\text{سنا (لا)}}$$

اگر ∞ تو لا کی بجائے ا ہی رکھنے سے سوال بدل کر یہ ہو جائیگا کہ اتنا معلوم کی جائے جبکہ ∞ ، اس لئے اس صورت میں بھی مسئلہ درست رہتا ہے۔

(۲) صورت $\frac{\infty}{\infty}$ - پہلے فرض کرو کہ فنا (لا) = سنا (لا)

دونوں مائل بہ لائنیاں ہوتے ہیں جبکہ لا مائل بہ لامتناہی ہو۔ فرض کرو کہ لا کی بہت بڑی مگر محدود قیمت ج ہے۔ (ا) میں ب کی بجائے لا اور لا کی بجائے ج رکھنے سے

$$\frac{\text{فنا (لا) - فنا (ج)}}{\text{سنا (لا) - سنا (ج)}} = \frac{\text{فنا (لا)}}{\text{سنا (لا)}} \quad (ج > لا > لا) \dots (ع)$$

$$\frac{\text{فنا (ج) - فنا (لا)}}{\text{سنا (ج) - سنا (لا)}} = \frac{\text{فنا (ج)}}{\text{سنا (ج)}} \times \frac{\text{فنا (لا)}}{\text{سنا (لا)}} - ۱ = \frac{\text{فنا (ج)}}{\text{سنا (ج)}} - ۱$$

اس لئے (ع) کی رو سے

$$\frac{\text{سأ (ج)}}{\text{سأ (لا)}} - 1 = \frac{\text{فأ (لا)}}{\text{سأ (لا)}} \times \frac{\text{فأ (لا)}}{\text{سأ (لا)}} - 1 = \frac{\text{فأ (ج)}}{\text{فأ (لا)}}$$

اب ج کو آٹا بڑا لو کہ $\frac{\text{فأ (لا)}}{\text{سأ (لا)}}$ اور اسکی انتہا $\frac{\text{فأ (لا)}}{\text{سأ (لا)}}$ کا فرق بہ نسبت صہ کے کم ہو۔ پھر ج کی یہ قیمت مقدر یہ ثابت کر دو، اس طرح فأ (ج) اور سأ (ج) اگرچہ بڑے ہیں مگر محدود ہیں۔ اس کے بعد لا کو آٹا بڑا لو (اور ایسا ممکن ہے کیونکہ فأ (لا) اور سأ (لا) دونوں مائل بہ لاتناہی ہوتے ہیں) کہ یابیں جانب کی دوسری کسر اور اکا فرق مطلق صہ سے کم ہوگا اب کسر فأ (لا) دو ایسے اجزائے ضربی کا حاصل ضرب ہے جن میں سے پہلے کا فرق $\frac{\text{سأ (لا)}}{\text{سأ (لا)}}$ سے کم ہے بہ نسبت صہ کے اور دوسرے کا فرق اس سے کم ہے یہ نسبت صہ کے اور صہ صہ اتنے چھوٹے ہو سکتے ہیں جتنا ہم چاہیں۔

اس لئے $\frac{\text{فأ (لا)}}{\text{سأ (لا)}}$ کی انتہا ۱ ہے یعنی

$$\frac{\text{سأ (لا)}}{\text{سأ (لا)}} = \frac{\text{فأ (لا)}}{\text{سأ (لا)}} \rightarrow \infty$$

(ب) اسکے بعد فرض کر دو کہ فأ (لا) سأ (لا) دونوں مائل بہ لاتناہی ہوتے ہیں اور لا محدود ہے۔ لا کی بجائے ۱ + $\frac{1}{\text{سأ}}$ رکھنے سے سلسلہ بالا یہ رہ جاتا ہے کہ ∞ کے لئے انتہا معلوم کی جائے، پس اس صورت میں

بھی سبکدست رہتا ہے۔

اوپر کا ثبوت (Gennochi-Peano) کے احصا سے اخذ کیا گیا ہے
(جرمن ترجمہ، لیپنرگ، ٹیوبنر)

(۳) دیگر صورتیں اگر فہ (۱) = ۰، سہ (۱) = ∞ تو ہم
لکھ سکتے ہیں

$$\text{فہ (لا)} \times \text{سہ (لا)} = \text{فہ (لا)} \div \frac{1}{\text{سہ (لا)}}$$

اس طرح یہ صورت صورت اول میں تبدیل ہو جاتی ہے۔
صورتیں : ∞، ∞، ∞ کو اگر ہم لینے سے تحول ہو جاتی ہیں ملاحظہ ہو دفعہ
۵۲ مثال ۶۵۔

صورت ∞ - ∞ کے لئے دفعہ ۵۲ مثال ۴ کی طرح عمل کیا جاسکتا ہے۔
یا سلسلوں میں پھیلانے سے دلی جاسکتی ہے عمل تفرق کو سلسلوں میں
پھیلانے کے عمل کے ساتھ ملایا جاسکتا ہے۔

مثال ۱۔ اگر ن مثبت ہو تو لوک لا $\frac{1}{\text{ن}}$ نل یہ صفر ہوتا ہے جبکہ لا نل یہ
لا متناہی ہو۔

$$\text{نہا} \frac{\text{لوک لا}}{\text{لا}} = \text{نہا} \frac{1}{\text{لا}} = \text{نہا} \frac{1}{\text{لا}} = \frac{1}{\text{لا}} \cdot \text{نہا} = \frac{1}{\text{لا}} \cdot \infty = \infty$$

مثال ۲۔ دو متبوع متغیروں کے تفاعل $\frac{\text{لا}}{\text{لا+ما}}$ کی انتہا لا ← اور ما ←۔

کے لئے معلوم کرو کہ متعلق جو تعریف ہم نے اوپر اختیار کی ہے اسکی اختیاری
”اصل قیمت“ کے متعلق جو تعریف ہم نے اوپر اختیار کی ہے اسکی اختیاری
نوعیت کی اس مثال سے توضیح ہوتی ہے نیز اس مثال سے واضح ہو گا کہ ایک
متغیر کے تفاعل کی انتہاؤں اور دو متغیروں کے تفاعل کی انتہاؤں میں کس قدر فرق

اور یہ کہ تعامل کسی ایک قیمت کی طرف مائل کیا جاسکتا ہے،
 کچھ دیکھو: لا، لا اس طرح حاصل ہوگا

$$\text{نہا} = \frac{\text{لا} - \text{ما}}{\text{لا} + \text{ما}} = \text{سا} = \frac{\text{لا} - \text{لا لا}}{\text{لا} + \text{لا لا}} = \frac{\text{لا} - \text{لا}}{\text{لا} + \text{لا}}$$

لا کو مناسب قیمت دینے سے $\frac{\text{لا}}{\text{لا} + 1}$ کسی عدد کے مساوی ہو سکتا ہے،
 ہندسی نقطہ نظر سے، محور سے سطح ہی (لا + ما) = لا - ما پروتھ ہوتا ہے
 اور جیسے لا اور ما صفر کی طرف مائل ہوتے ہیں نقطہ (لا، ما) (حی) محور
 سے پر کے کسی نقطہ کے قریب لایا جاسکتا ہے۔

مشق ۱۵

سفرات ۱ تا ۱۵ میں وجہ کی معلوم قیمتوں کے لئے تقاطعوں کی انتہائیں
 ("اصلی قیمتیں") دریافت کرو۔

$$۱ - \{ \text{لا} - (ن + ۱) \text{لا} + \text{لا}^{ن+۱} \} / \{ (۱ - \text{لا}) \text{لا} \} \text{ جبکہ لا} = ۱$$

$$۲ - \{ ۱ - (۱ - \text{لا}) \text{لا} \} / \{ \text{لا} \text{لا} \} \text{ جبکہ لا} = ۰$$

$$۳ - \text{لا} - \text{لا} (۱ - \text{لا}) / \{ \text{لا} \} \text{ جبکہ لا} = \infty$$

$$۴ - \{ (۱ + \text{لا}) (۱ + \text{لا}) \dots (۱ + \text{لا}) \} / \{ \text{لا} \} \text{ جبکہ لا} = \infty$$

رکھو لا = $\frac{۱}{\text{حی}}$ اور مسئلہ ثنائی سے پھیلاؤ۔

$$۵ - (۱ + \frac{۱}{\text{لا}}) \text{لا} \text{ اور } (۱ + \frac{۱}{\text{لا}}) \text{لا} \text{ جبکہ لا} = \infty$$

ہوتا ہے کیونکہ (لا-ج) فہ (لا) مائل بہ (لا-ج) یعنی مائل بہ لاتناہی ہوتا ہے لیکن مفروض کی بنیاد فہ (لا) مائل بہ سفر ہوتا ہے پس اگر محدود ہے تو اسکو لازماً صفر ہونا چاہئے۔

۱۹۔ ثابت کرو کہ سلسلہ $\frac{1}{\text{لوک } (۲) \text{ عہا}} + \frac{1}{\text{لوک } (۳) \text{ عہا}} + \frac{1}{\text{لوک } (۴) \text{ عہا}} + \dots$ متع ہے عہا کی تمام مثبت قیمتوں کے لئے۔

$\frac{1}{۲} + \frac{1}{۳} + \frac{1}{۴} + \dots$ کے ساتھ مقابلہ کرو۔

∞ کے لئے $\frac{1}{\text{لوک } (ن) \text{ عہا}} \div \frac{1}{ن}$ یعنی $(ن \text{ عہا} / \text{لوک } (ن) \text{ عہا})$

مائل بہ لاتناہی ہوتا ہے [دفعہ ۵۳ مثال ۱] اس لئے سلسلہ معلومہ متع ہے چونکہ موسیقی سلسلہ متع ہے۔ جب عہا منفی ہو تو ظاہر ہے کہ سلسلہ متع ہے۔



باب ہشتم

تفرقی مساواتیں

۵۴۔ اس باب میں ہم چند تفرقی مساواتوں پر بحث کریں گے جو ابتدائی اعمال ریاضی میں استعمال ہوتی ہیں، اس جگہ ان کا محض مختصر سا خاکہ پیش کیا جائے گا تفصیلی بحث طالب علم کو خود (ساتھ کی تفرقی مساواتوں) (مکملن) یا ہارے کی تفرقی مساواتوں (لونگ مین) میں ملے گی۔

مجموعی تفرقی مساوات وہ مساواتی رشتہ ہے جو ایک متغیر متبوع اور ایک متغیر تابع اور تابع متغیر کے ایک یا زیادہ مشتقوں کے درمیان ہو۔

جزوی تفرقی مساوات وہ مساواتی رشتہ ہے جو دو یا زیادہ متبوع متغیروں ایک متغیر تابع اور تابع متغیر کے جزوی مشتقوں کے درمیان ہو۔

ہم یہاں صرف مجموعی تفرقی مساواتوں سے بحث کریں گے۔

تفرقی مساوات کا رتبہ اس میں کے سب سے اعلیٰ مشتق کے رتبہ سے متعین ہوتا ہے، اور تفرقی مساوات کا درجہ اعلیٰ سے اعلیٰ مشتق کا درجہ ہے جبکہ مساوات کو کسروں سے صاف کر دیا جائے اور مشتقوں کی قوتیں مثبت صحیح عدد ہوں۔

مثال لا^۱ ما^۱ + لا^۱ ما^۱ + (لا^۱ - ر) ما^۱ = ۱۔ دو سرے رتبہ کی اور درجہ اول

کی تفرقی مساوات ہے۔

لا^۱ ما^۱ - ما^۱ + لا^۱ = ۱۔ رتبہ اول اور درجہ دوم کی تفرقی مساوات ہے۔ اسقاط کے نظریہ سے ہم جانتے ہیں کہ ایک مقدار کو دو مساواتوں

دو مقداروں کو تین مساواتوں سے 'ن' مقداروں کو (ن + ۱) مساواتوں سے ساقط کر سکتے ہیں۔ پس اگر ایک ایسی مساوات کو جس میں لا، ما، اور مستقل شریک ہوئے ہیں ایک دفعہ تفرق کیا جائے تو نئی مساوات میں لا، ما، اور مستقل شریک ہوں گے ان دو مساواتوں سے ایک مستقل ساقط ہو سیکے گا۔ اس طرح اسقاط کے بعد جو مساوات حاصل ہوگی وہ رتبہ اول کی تفرقی مساوات ہوگی جس میں مفروضہ مساوات کی نسبت مستقلات کی مقدار بقدر ایک کے کم ہوگی۔

اسی طرح اگر دی ہوئی مساوات کو دو دفعہ تفرق کیا جائے تو کل تین مساواتیں حاصل ہوں گی جن سے دو مستقل ساقط ہو سکیں گے اور اسقاط کے بعد مساوات محصلہ دو رتبہ کی تفرقی مساوات ہوگی جس میں مستقلات کی تعداد نسبت اصلی مساوات کے بقدر دو کے کم ہوگی۔ وغیرہ وغیرہ۔

ہر صورت میں دی ہوئی مساوات کو محصلہ تفرقی مساوات کا کامل ابتدائی کہتے ہیں۔ ہم نے دیکھا ہے کہ کامل ابتدائی میں ایک، دو، مستقل شریک ہوتے ہیں جو متناظر تفرقی مساوات میں نہیں ہوتے جبکہ موخر الذکر بالترتیب رتبہ اول، دوم، کی تفرقی مساوات ہو۔ اسقاط کے عمل میں مستقل کی قیمت خواء یہ کہہ ہی ہو بحث میں نہیں آتی، ان مستقلوں کو ہم اختصاراً مستقل کہیں گے۔

مثال ۱۔ فرض کرو کہ دی ہوئی مساوات

$$Ma = (La + Kb) \dots \dots \dots (1)$$

ہے، دوبار تفرق کرنے سے

$$\text{حرف } Ma = 2(La) \dots \dots \dots (2)$$

$$\text{حرف } Ma = 2(La) \dots \dots \dots (3)$$

پہلے تفرق سے حرف ساقط ہو جاتا ہے، (۲) اور (۳) سے حرف ساقط ہو سکتا ہے اور یہ تفرقی مساوات ملتی ہے

$$La - \text{حرف } Ma = 2(La) \dots \dots \dots (4)$$

سب کی قیمت خواہ کچھ ہی ہو (۱) سے قطع مکانی تعبیر ہوتا ہے جس کا وتر خاص $\frac{1}{2}$ ہے اور جس کا محور، محور صاف پر منطبق ہوتا ہے۔ پس (۲) ایسے تمام سکائیون کی تفرقی مساوات ہے، نیز (۴) ان تمام سکائیون کی تفرقی مساوات ہے جن کے محور، محور صاف پر واقع ہوتے ہیں۔

مثال ۲۔ فرض کرو کہ دی ہوئی مساوات (۱-۱) + (۱-۲) = ج۔ (۱) ہے۔ دو دفعہ تفرق کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$(۱-۱) + (۱-۲) = ج - ج = ۰ \quad (۲)$$

$$۱ + (ج - ج) = ج - ج = ۰ \quad (۳)$$

ساواتوں (۱)، (۲)، (۳) سے اربعہ ساقط کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$ج (ج - ج) = ۱ + (ج - ج) = ج - ج = ۰ \quad (۴)$$

مساوات (۴) ان سب دائروں کی تفرقی مساوات ہے جن کا نصف قطر ج ہے، مساوات (۲) ان دائروں کی تفرقی مساوات ہے جن کا مرکز (۱، ۱) ہے، مساوات (۳) ان دائروں کی تفرقی مساوات ہے جن کے مرکز خط ج = ۱ پر واقع ہوتے ہیں۔

۵۵۔ پورا تکملہ۔ اگر دفعہ گذشتہ کی پہلی مثال میں ہم فرض کریں کہ

مساوات (۴) دی گئی ہے اور اس تفرقی مساوات سے شروع ہو کر تکمیل کے عمل سے ہم (۱) حاصل کرتے ہیں تو ایسے عمل کو ہم مساوات کا تکمیل کرنا یا اصل کرنا کہتے ہیں۔

اس نقطہ نظر سے (۱) کو (۴) کا کامل تکملہ (یا پورا تکملہ) کہنا زیادہ مناسب ہوگا۔ ایسی صورت میں اربعہ کو ہم تکمیل کے اختیاری مستقل کہیں گے۔

مساوات (۴) ۵ و ۶ سے رتبہ کی ہے اور (۱) میں دو اختیاری مستقل ہیں، تفرقی مساواتوں کی مستند کتابوں میں عام تفرقی مساوات کے پورے کچھ کے وجود کے متعلق مسائل ثابت کئے جاتے ہیں اور یہ دکھایا جاتا ہے کہ جب مساوات (۱) میں رتبہ کی ہو تو اسکے پورے تکملہ میں (۱) اختیاری مستقل شریک ہوتے ہیں۔

خاص تکملہ وہ ہے جو پورے تکملہ میں ایک یا زیادہ مستقلوں کو کوئی خاص قیمت دینے سے حاصل ہو، مثلاً دفعہ گذشتہ مثال (۱) میں مساوات (۴) کے خاص تکملے $ما = لا - ۱$ ، $ما = ۲ - لا$ ہو سکتے ہیں۔

تفرقی مساوات کے محمل پر غور کرنے کا ایک اور نقطہ نظر بھی ہے اور وہ یہ ہے۔

تفاعل ما معلوم کر دو جو (۱) مساوات $لا - عفا - ما = کوپورا$ کرے (۲) جو ب کے مساوی ہو جبکہ $لا = ۱$ (۳) جس کا پہلا مشتق ج ہو جبکہ $لا = ۱$

چونکہ پورا تکملہ $ما = لا + ب$ ہے جس میں دو اختیاری مستقل (ب) شریک ہوتے ہیں، ہم ان کی ایسی قیمتیں معلوم کر سکتے ہیں جو شرائط (۲) اور (۳) کو پورا کریں۔ ان شرائط سے حاصل ہوتا ہے

$$ب = لا + ب، ج = ۲ - لا$$

$$پس \quad لا = \frac{ج}{۲}، ب = ۱ - \frac{ج}{۲}$$

تفاعل مطلوب ہے $ما = \frac{ج}{۲} - لا + ۲ - \frac{ج}{۲}$ جو شرائط (۱) (۲) (۳) کو پورا کرتا ہے۔

اسی طرح کی ایک اور مثال کے لئے ملاحظہ ہو دفعہ ۶۹ حصہ اول مثالیں ۱ اور ۲۔ طالب علم کو چاہئے کہ ذیل کی مشقیں حل کرے۔ ان میں سے کئی تفرقی مساواتیں بھی ہیں۔

- ۱۰۔ اگر ما = (ج م ن لا) + ب جب ن لا + ع جم ف لا + ق جب ف لا
جہاں ایک اختیار ہے اور ن اور ف ناسا دی ہیں تو ثابت کر دو کہ
- عفا ما + ن ما = (ن۔ ف) ع جم ف لا + (ن۔ ف) ق جب ف لا
- ۱۱۔ اگر ما = قو^ک (ج م ن لا) + ب جب ن لا تو عفا ما + ک عفا ما
+ (ن۔ ف + ک) ما =۔
- ۱۲۔ اگر ما = قو^ک (و قو + ب قو^ن) تو عفا ما + ک عفا ما
= (ن۔ ف + ک) ما =۔
- ۱۳۔ اگر ما = و قو + ب قو^ن تو عفا ما = (م + ن) عفا ما + م ما =۔
- ۱۴۔ اگر ما = (و + ب لا) قو^ن تو عفا ما = ۲ ن عفا ما + ن ما =۔
[مقابلہ کرو سوالات ۱۳ اور ۱۴ اکا]
- ۱۵۔ اگر ما = (و + ب لا) جم ن لا + (ج + د لا) جب ن لا تو
عفا ما + ۲ ن عفا ما + ن ما =۔
- ۱۶۔ اگر ما = (ج م ن لا) + ب جب ن لا / لا تو
عفا (لا ما) + ن لا ما =۔ یا عفا ما + $\frac{۲}{۳}$ عفا ما + ن ما =۔
- ۱۷۔ اگر ما = (و قو + ب قو^ن) / لا تو
عفا ما + $\frac{۲}{۳}$ عفا ما = ن ما =۔
- ۱۸۔ اگر ما = م لا + $\frac{۱}{۳}$ جہاں م اختیاری مستقل ہے تو
لا (عفا ما) = م عفا ما + د =۔

مثال ۱۔ $n(1+a) = m + m(1+b) =$

یعنی $\frac{n}{m+b} + \frac{m}{1+a} =$

اس لئے n لوگ $(m+b)$ + m لوگ $(1+a) =$ مستقل

یا $\text{لوگ } [(m+b)^n] = \text{مستقل}$

یا $(m+b)^n = (1+a)^m$ =
اوپر کی تین مساواتوں میں سے کوئی ایک تفرقی مساوات کامل خیال کی جاسکتی ہے لیکن آخری مساوات جبریہ شکل میں ہونے کی وجہ سے زیادہ موزوں ہے۔
نوٹ ۲۔ متجانس مساواتیں۔ تفرقی مساوات متجانس کہلاتی ہے

اگر وہ اس شکل کی ہو

$$\frac{f(1+a)}{f(1+b)} =$$

جہاں $f(1+a)$ اور $f(1+b)$ دونوں میں ایک ہی درجہ کے متجانس متغیر ہیں۔

اوپر کی مساوات کو حل کرنے کے لئے متغیر تابع کی بجائے رکھو $m = 1+a$

$$\text{مساوات ہو جاتی ہے } \frac{f(1+a)}{f(1+b)} = \frac{f(1+a)}{f(1+b)} =$$

اب متغیر جدا ہو سکتے ہیں۔

$$\text{مثال ۲۔ } \frac{f(1+a)}{f(1+b)} = \frac{f(1+a)}{f(1+b)} =$$

رکھو $m = 1+a$ اس طرح حاصل ہوتا ہے $\frac{f(1+a)}{f(1+b)} = \frac{f(1+a)}{f(1+b)} =$

$$\text{جس سے } \frac{f(1+a)}{f(1+b)} = \frac{f(1+a)}{f(1+b)} =$$

اس لئے لوک { (لا-ا) و } = مستقل = لوک م

یا لا۔ ما = م لا م اختیاری مستقل ہے۔

مساوات (لا + ب + ما + ج) عفا = لا + ب + ما + ج کو
اس طرح تجانس بنا سکتے ہیں۔ رکھو ضما = لا + ب + ما + ج { بشرطیکہ
عفا = لا + ب + ما + ج }

اب۔ رب صفر نہ ہو [دیکھو مشق ۱، سوال ۶، ۷]

نمونہ ۳۔ خطی مساواتیں۔ تفریق مساوات خطی کہلاتی ہے جبکہ متغیر تابع

اور اسکے مشتقات جو اس میں شریک ہوں سب درجہ اولی کے ہوں۔

پس رتبہ اول کی خطی مساوات اس شکل کی ہوگی

عفا + ف + ما = ف

جہاں ف اور ق صرف لا کے تفاعل (یا مستقل) ہیں۔

قرین کر کہ ف = م ف م لا مساوات کو ف سے ضرب دو

اب چونکہ عفا ف = ف عفا ف = ف × ف

اس لئے حاصل ہوتا ہے ف عفا + ف + ف = ف عفا (ف + ف)

اسلئے عفا (ف + ف) = ف ف

اسلئے ف + ف = م ف م لا + م

نتیجہ صریح۔ مساوات عفا + ف + ف = ف م خطی مساوات کی

صورت میں لائی جاسکتی ہے اگر ہم رکھیں و = ما^ن اور و کو متغیر تابع

جب 'ت' = 'لا'۔ اور اس لئے م = $\frac{۱۴}{۵}$

اس لئے لا = $\frac{۱۴}{۵}$ (۱- فو^ز)

اس میں $\frac{۱۴}{۵}$ فو^ز زائد یا امار شدہ (Induced) رو ہے جو معدوم

ہو جاتی ہے جیسے کل رو اپنی قائم قیمت $\frac{۱۴}{۵}$ حاصل کر لیتی ہے۔
اسکے بعد فرض کرو کہ م = ۴، جم (فت- عہا)

اب چونکہ $\frac{۱۴}{۵}$ فو^ز جم (فت- عہا) فرت = $\frac{۱۴}{۵}$ فو^ز [جم (فت- عہا) + فل جب (فت- عہا)]

میں حاصل ہوتا لا = م فو^ز + $\frac{۱۴}{۵}$ فو^ز [جم (فت- عہا) + فل جب (فت- عہا)]

جیسے بڑھتا ہے رقم م فو^ز کے قابل لحاظ ہونے کی اہمیت کم ہوتی
جاتی ہے اور دوسری رقم سے قائم اہتزاز حاصل ہوتا ہے، قائم اہتزاز کو اس
شکل میں بھی لکھ سکتے ہیں

لا = $\frac{۱۴}{۵}$ فو^ز [جم (فت- عہا) + فل جب (فت- عہا)]

جہاں مس عہا = $\frac{۱۴}{۵}$ فو^ز مقدار [فو^ز + فل^{ست}] کو حلقہ کی تعداد

(Impedance) کہتے ہیں۔

نمونہ ۴۔ حاضر مساواتیں۔ مساوات

$م + ن عف م = م فر لا + م$ یا $م فر لا + م = م$ ۔
 کو حاضر یا ٹھیک مساوات کہیں گے جبکہ $م$ ، $ن$ ، $لا$ اور $م$ کے تفاعل ہوں
 اور $م فر لا + م$ مر $م =$ پورا تفرقہ ہو یعنی $جف م = جف ن$ (رفع ۹، حاصل)
 ایسی صورت میں ایک تفاعل عا ایسا موجود ہے کہ $مر ع = م فر لا + م$ مر $م$
 اور مساوات کا ٹکملہ ہے $ر = مستقل$ ۔

مثال ۵۔ $۲ لا م - م + ۲ لا + (لا - ۲ لا م + ۲ م) عف م =$

یہاں $م = ۲ لا م - م + ۲ لا + م = لا - ۲ لا م + ۲ م$

اور $جف م = ۲ لا - م = جف ن$

پس معلوم ہوا کہ یہ مساوات حاضر یا تیار مساوات ہے۔ اسلئے ہم مساوات کو
 کامل تفرقوں کے مجموعہ کے طور پر ترتیب دے سکتے ہیں۔

یعنی $(۲ لا م فر لا + لا م فر م) - (م فر لا + ۲ لا م فر م) + (۲ لا م فر لا + م فر م)$

یعنی $فر لا م - فر لا م + م فر لا + م فر لا$

پس $ع = لا م - لا م + لا م + م$

اور ٹکملہ ہے $لا م - لا م + لا م + م = ق$ (مستقل)

مثال ۶۔ $لا - ۲ م + ۲ لا م عف م =$

یہ حاضر مساوات نہیں ہے لیکن اگر اسے $\frac{۱}{۲}$ سے ضرب دیدیا جائے تو یہ حاضر

مساوات ہو جائے گی،

$\frac{لا - ۲ م + ۲ لا م}{۲} عف م = \frac{۲ م}{۲} عف م + \frac{لا - ۲ م + ۲ لا م}{۲}$

تیکڑے $\frac{لا + ما}{لا} = ق$ یا $لا + ما = ق لا$ جہاں ق مستقل ہے

جزو ضربی $\frac{۱}{لا}$ کو جسکے ساتھ ضرب دینے سے مساوات حاضر بن جاتی ہے
متکمل جزو ضربی کہتے ہیں۔ جب کوئی مساوات "ماضیہ" ہو تو کوئی ایسا
تکمل جزو ضربی بجانب پیٹنے سے مساوات حاضر بن جاتی ہے اور تکمل ہو سکتی ہے۔
۵۷۔ مساواتیں جو رتبہ اول کی ہیں نیکیں درجہ اول کی نہیں۔ عفاً ما کو ع
سے تعبیر کرو اگر مساوات 'ن' دیں درجہ کی ہو تو یہ اس کی شکل ہوگی

$$۱ \text{ ع} + ۲ \text{ ب} + ۳ \text{ ع} + \dots + ط + ع + ل = \dots (۱)$$

جہاں 'ا' ب' 'لا' ما کے تفاعل ہیں یا مستقل ہیں۔
اگر ممکن ہو تو ع کے لئے حل کرو عام طور پر ع کی قیمتیں ہونگی
 $ع = ع' \text{ ع} = ع' \text{ ع} = ع' \text{ ع} = \dots$

اور ان میں سے ہر ایک مساوات کو تکمل کرنے سے جو رشتہ حاصل ہوگا وہ
(۱) کو پورا کریگا۔

مثال ۱۔ لا ما ع'۔ (لا + ما) ع + لا ما =۔

$$\text{اسے } ع = \frac{ما}{لا} \text{ یا } ع = \frac{لا}{ما}$$

اور ان مساواتوں کے تیکڑے ہیں ما = ص لا' ما' لا' = ص جہاں ص
اور ص مستقل ہیں۔

مثال ۲۔ کلیہ دی مساوات ما = لا ع + ف (ع) (۱)

یہ خاص صورت کی مساوات ہے اس کو اس طرح تکمل کرتے ہیں۔

(۱) کو بجاؤ لا کے تفریق کرو حاصل ہوگا

$$ع = ع + لا \frac{فرع}{فر لا} + ف (ع) \frac{فرع}{فر لا}$$

$$یا \{ لا + ف (ع) \} \frac{فرع}{فر لا} = (۲)$$

$$پس \frac{فرع}{فر لا} = یعنی ع = مستقل = ج$$

$$لا + ف (ع) = (۳)$$

(۱) ع کے لئے مندرجہ کرنے سے پورا تکملہ حاصل ہوتا ہے

ما = ج لا + ف (ج) (۴)

علاوہ اسکے اگر (۱) اور (۳) سے ع ساقط کر دیا جائے تو لا اور ما میں رشتہ مائل ہوگا جو (۱) کو پورا کرے گا، یہ رشتہ (۴) میں ج کو کوئی خاص قیمت دینے سے مائل نہیں ہو سکتا، اسکو ہم مساوات کا نادر مل کہینگے۔

در اصل نادر مل خطوط کے قبیل (۴) کا لغاف ہے، کیونکہ اگر ہم (۴) اور لا + ف (ج) = سے ج کو ساقط کریں تو صریحاً لا، ما میں وہی رشتہ مائل ہوگا جسے نادر مل کہتے ہیں (صرف ج اور ع کا تبادلہ کر دیا گیا ہے) اور دفعہ ۳۶ میں ہم نے دیکھا ہے کہ لغاف کا ڈھال وہی ہوتا ہے جو کہ قبیل (۴) کے منحنیوں کا ان کے انتہائی نقاط تقاطع پر۔

مثال کے طور پر ما = لا ع + ع کا پورا تکملہ

$$ما = ج لا + \frac{1}{ج}$$

اور نادر مل ما = ۴ لا

۵۸۔ رتبہ دوم کی مساواتیں۔

نمود ۱۔ عفاً ما = ف (لا) جو صرف لا کا تعامل ہے۔

بلحاظ لاکے دو بار مکمل کرو، دو اختیاری مستقل شریک ہونگے۔
 نمونہ ۲۔ عفا ما = ف (وا) صرف ما کا تفاعل۔
 عفا ما کے ساتھ ضرب دو کتب چونکہ عفا ما عفا ما = عفا [۱/۲ (عفا ما)]
 ۱/۲ (عفا ما) = ف (ما) عفا ما ملا + م (مستقل) = ف (ما) و ما + م
 اب یہ رتبہ اول کی مساوات ہے، ممکن ہے کہ یہ آگے تکمیل ہو سکے۔
 مثال ۱۔ طول ل کے سادہ رقاص کی حرکت کی مساوات ہے
 ل طما = ج جب طما تکمیل کرنے کی غرض سے طما کے ساتھ
 ضرب دو حاصل ہوگا

$$\frac{1}{2} ل (طما) = ج جم طما + م جہاں م مستقل ہے۔$$

جب ا ت = تو فرض کرو کہ طما = عا اور طما =

اس طرح م = ج جم عا

$$اور طما = \frac{1}{2} ج جم طما - جم عا = \frac{1}{2} ج جم طما - ج عا جب طما$$

علامت جذر کے پہلے منفی علامت لی گئی ہے کیونکہ ت کے بڑھنے سے طما گھٹتا ہے

$$اب رکھو جب طما = ج جب طما جب فدا تحویل کے بعد$$

$$فرت = - \frac{1}{2} ج ل \times \frac{1}{2} ج عا جب فدا$$

ابتدائی تفاعلوں کے واسطے سے یہ تکمیل عمل میں نہیں آسکتا، لیکر ت کو ایک
 لاشعرا ہی سلسلہ کی رقوم میں بیان کر سکتے ہیں۔ ت کی قیمت چوتھائی
 مدت دوران کے لئے ہے [۱/۲] دفعہ ۴، مثال ۳ [عام طور پر

$$ت = \frac{ل}{ج} \quad \frac{ف}{ف} \quad \frac{ف}{ف} \quad \frac{ف}{ف}$$

نمونہ ۳۔ عفا = ف (عفا) جو صرف عفا کا تفاعل ہے۔
 فرض کرو کہ عفا = و، حاصل ہوگا عفو = ف (و) اس سے
 و معلوم کرنا ممکن ہے اس کے بعد ما معلوم ہو سکتا ہے۔
 مثال ۲۔ مساوات ج عفا = {ا + (عفا)} سے حاصل ہوتا ہے

$$لا = \frac{ج}{و + ا} + ا \text{ (مستقل)}$$

$$\text{عفا} = و = \frac{لا - ا}{\{ج - (لا - ا)\}}$$

$$ما = ف = \frac{\{ج - (لا - ا)\} + ب \text{ (مستقل)}}{یا}$$

$$یا = (لا - ا) + (ما - ب) = ج$$

۵۹۔ خطی مساواتیں۔ رتبہ دوم کے نمونہ کی خطی مساوات یہ ہے

$$\text{عفا} + ما + ط = ق + عفا + ق + ما = م (۱)$$

جہاں ط، ق، م، ص، لا کے تفاعل ہیں (یا مستقل ہیں)

تمام خطی مساواتوں کا پورا تکملہ دو تفاعلوں کا حاصل جمع ہوتا ہے

(۱) اشم تفاعل (م، ف) جو ادھر کی مساوات (۱) کا پورا تکملہ ہو جبکہ م
 (یا عام طور پر دہ رقم جو ما اور اسکے مشتقوں پر منحصر نہ ہو) صفر ہو۔ اس تفاعل میں
 دو (دو) رتبہ کی مساوات میں (ن) اختیاری مستقل ہونگے۔

(۲) خاص تکملہ (خ، م) جو پوری مساوات (۱) کا حل ہو جیسے یہ ادھر پر بندرج
 یعنی جبکہ اسکے دائیں بائیں جانب کے رکن دونوں برقرار رکھے جائیں۔ اس تفاعل

میں اختیاری مستقل نہیں واقع ہونگے۔
 ہم ذیل کا مسئلہ صرف رتبہ دوم کی مساواتوں کے لئے ثابت کرتے ہیں، لیکن
 استدلال عام ہے۔ 'ن' میں رتبہ کی مساوات کے لئے 'ع' کی طرح کے
 'ن' تفاعل ہونگے اور 'ن' میں 'ن' اختیاری مستقل شریک ہونگے۔

اگر ما = ع اور ما = و مساوات ذیل کو پورا کریں

عفا + ما + ط عفا + ما + ق = ما + (۲)

تو (ع + ع) + (ب + ب) + (و + و) + (ق + ق) = (ا + ا) + (ب + ب) + (و + و) + (ق + ق) اختیاری مستقل ہیں۔

کیونکہ اگر عفا + ع + ط عفا + ع + ق = ع + ع + ط عفا + ع + ق اور عفا + ع + ط عفا + ع + ق =

تو عفا + (ا + ب + و) + ط عفا + (ا + ب + و) + ق = (ا + ب + و) + ق + (ا + ب + و) + ط عفا + (ا + ب + و) + ق

یعنی (ا + ب + و) + ط عفا + (ا + ب + و) + ق = (ا + ب + و) + ق + (ا + ب + و) + ط عفا + (ا + ب + و) + ق

اب اگر ما = ہ خاص تکملہ ہو یعنی اگر ہ مساوات (۱) کو پورا کرے اور

(ا + ب + و) + ط عفا + (ا + ب + و) + ق = (ا + ب + و) + ق + (ا + ب + و) + ط عفا + (ا + ب + و) + ق

کیونکہ اگر ما = (ا + ب + و) + ط عفا + (ا + ب + و) + ق

عفا + ما + ط عفا + ما + ق = عفا + (ا + ب + و) + ط عفا + (ا + ب + و) + ق

+ ق + (ا + ب + و) + ط عفا + (ا + ب + و) + ق = عفا + (ا + ب + و) + ط عفا + (ا + ب + و) + ق

= منفرد مس [کیونکہ بائیں جانب پہلا حصہ منفرد کے مساوی

ہے اور ہ مساوات (۱) کو پورا کرتا ہے اسلئے

دوسری سطر س ہے]

پس ما کی یہ قیمت (۱) کو پورا کرتی ہے اور چونکہ اس میں دو مستقل ہیں یہ جملہ

مساوات (۱) کا پورا تکملہ ہے۔

اس جگہ ہم صرف ان مساواتوں پر غور کریں گے جن میں ط اور ق محض مستقل ہیں

۶۰۔ متمم تفاعل۔ ذیل کی مساوات کو تکمل کرنا ہے۔

$$\text{عف}^{\text{لا}} + \text{ما} + \text{عف}^{\text{لا}} + \text{ب} + \text{ما} = \dots\dots\dots (۳)$$

$$(۱) \text{ فرض کرو کہ } \text{ما} = \text{فو}^{\text{لا}} (\text{لہ}^{\text{لا}} \text{مستقل}) \text{ تب}$$

$$(\text{لہ}^{\text{لا}} + \text{لہ}^{\text{لا}} + \text{ب}) \text{ فو}^{\text{لا}} = \dots\dots\dots$$

پس اگر لہا ذیل کی معاون مساوات کی اصل ہو تو

$$\text{لہ}^{\text{لا}} + \text{لہ}^{\text{لا}} + \text{ب} = \dots\dots\dots (۴)$$

تو فو^{لا} مساوات (۳) کو پورا کریگا۔ (۴) کی دو اصلیں لہا، لہا ہیں

$$\text{لہ}^{\text{لا}} = \dots\dots\dots + \left[\frac{1}{\text{ب}} - \frac{1}{\text{ب}} \right] \text{ لہ}^{\text{لا}} = \dots\dots\dots - \frac{1}{\text{ب}} - \frac{1}{\text{ب}}$$

اور فو^{لا}، فو^{لا} مساوات (۳) کے دو حل ہیں۔

پس (۳) کا پورا تکملہ ہے

$$\text{ما} = (\text{لہ}^{\text{لا}} + \text{ب}) \text{ فو}^{\text{لا}} = \dots\dots\dots (\text{لہ}^{\text{لا}} + \text{ب}) \text{ فو}^{\text{لا}}$$

$$\text{جہاں } \text{ن} = \left[\frac{1}{\text{ب}} - \frac{1}{\text{ب}} \right] \dots\dots\dots (۵)$$

اب ہم خاص صورتوں پر غور کرتے ہیں۔

(۲) اگر $\text{لہ}^{\text{لا}} = \text{ب}$ تو مساوات (۴) کی دونوں مساوی اصلیں ہونگی یعنی

$$\text{لہ}^{\text{لا}} = \text{لہ}^{\text{لا}} = \dots\dots\dots \text{ ایسی حالت میں مساوات (۵) ہو جائیگی}$$

$$\text{ما} = (\text{لہ}^{\text{لا}} + \text{ب}) \text{ فو}^{\text{لا}}$$

اور اس میں اختیاری مستقل صرف ایک ہے کیونکہ $\text{لہ}^{\text{لا}} + \text{ب}$ کی بجائے ہم

ج لکھ سکتے ہیں۔ جب $\text{لہ}^{\text{لا}} = \text{ب}$ تو فرض کرو کہ $\text{ما} = \text{فو}^{\text{لا}}$ اور مساوات

(۳) ہو جاتی ہے جزو ضربی فو^{لا} کو نظر انداز کرنے سے

عفا ع = ۰، جس کا پورا تکملہ ع = ۱ + جب لا
پس (۳) کا پورا تکملہ اس صورت میں جبکہ معاون مساوات کی اصلیں مساوی
ہوں، ہر ایک = $\frac{1}{4}$ - یہ ہے

$$ما = (۱ + جب لا) قو \frac{1}{4} لا \dots \dots \dots (۶)$$

(۳) اگر $لا > ۳$ ب تو (۴) کی اصلیں خیالی ہیں۔ پھر فرض کرو کہ
ما = قو $\frac{1}{4} لا$ ع اور مساوات (۳) ہو جاتی ہے

$$عفا ع + م = ع = ۰ \dots \dots \dots (۷)$$

جہاں $\frac{1}{4} لا$ - ب = م اور م حقیقی ہے۔
اب ع = جم م لا، ع = جب م لا دونوں (۷) کو پورا کرتے ہیں،
پس اسکا پورا تکملہ ہے

$$ع = (جم م لا + جب جب م لا) اور (۳) کا پورا تکملہ جبکہ $لا > ۳$ ب یہ ہے$$

$$ما = قو \frac{1}{4} لا - ع = قو \frac{1}{4} لا (جم م لا + جب جب م لا) \dots \dots (۸)$$

اب ہم دیکھینگے کہ (۵) اور (۸) کس طرح لکھے جاسکتے ہیں جبکہ (۴) کی اصلیں
معلوم ہوں، فرض کرو کہ خ حسب معمول را - آ کو تعبیر کرتا ہے، (۴) کی اصلیں
جب حقیقی ہوں تو رکھو $\frac{1}{4} لا$ - ب = ن، اصلیں اس حالت میں ہوں گی۔

$$- \frac{1}{4} ن + \frac{1}{4} ن - \frac{1}{4} ن$$

$$اور حل ہے ما = قو \frac{1}{4} لا (قو + جب قو لا)$$

اگر (۴) کی اصلیں خیالی ہوں تو رکھو $\frac{1}{4} لا$ - ب = - ن

مجموعہ ہو۔ خاص تکملہ معلوم کرنے کا آسان طریقہ ابدال کا ہے۔ مساوات

(۱) اب ہے

$$\text{حفا} + \text{ا} = \text{حفا} + \text{ب} = \text{ما} = \text{س} \dots\dots\dots (۹)$$

صورت اول - $\text{س} = \text{ل} + \text{و} + \text{لا}$ ، فرض کر دے کہ $\text{ما} = \text{ج} + \text{و} + \text{علا}$ ، ہم ج کو ایسی قیمت معلوم کرتے ہیں کہ مساوات (۹) پوری ہو جائے۔ درج کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{ج} (\text{عما} + \text{ا} + \text{عما} + \text{ب}) + \text{و} + \text{لا} = \text{ل} + \text{و} + \text{علا}$$

$$\text{پس ج} + \text{و} + \text{علا} = \text{مساوات کو پورا کرے گا اگر ج} = \frac{\text{ل} + \text{و} + \text{علا} + \text{ا} + \text{عما} + \text{ب}}{\text{عما} + \text{ا} + \text{عما} + \text{ب}}$$

لیکن اسکی مستثنیٰ صورتیں ہیں
صورت اول (۱) اگر $\text{عما} + \text{علا} + \text{ا} + \text{عما} + \text{ب}$ مساوات (۴) کی اصل ہو تو

اور ج کی قیمت لامتناہی ہوگی، اس حالت میں $\text{ج} + \text{و} + \text{علا}$ مندرج کر کے دیکھو اگر $\text{عما} + \text{علا} + \text{ا} + \text{عما} + \text{ب}$ مساوات کی ابھری اصل ہو اور $\text{ج} + \text{و} + \text{علا}$ کر کے دیکھو اگر $\text{عما} + \text{علا} + \text{ا} + \text{عما} + \text{ب}$ مساوات کی اصل ہو۔

$$\text{مثال ۱۔ حفا} + \text{ا} = \text{حفا} + \text{ب} = \text{ما} = \text{و} + \text{و} + \text{لا}$$

مساوات لہذا - $\text{ل} + \text{ا} + \text{و} + \text{و} + \text{لا} = \text{و} + \text{و} + \text{لا}$ ، دو طرفہ خاص تکملہ معلوم کرنے کے لئے $\text{و} + \text{و} + \text{لا}$ کے ساتھ الگ الگ عمل کر دیکھو۔ چونکہ مساوات کی دہری اصل ہے، اس لئے $\text{و} + \text{و} + \text{لا}$ کے جواب میں خاص تکملہ معلوم کرنے کے لئے آزمائشی $\text{ج} + \text{و} + \text{لا}$ اور $\text{و} + \text{و} + \text{لا}$ کے لئے $\text{و} + \text{و} + \text{لا}$ پس رکھو $\text{ما} = \text{ج} + \text{و} + \text{لا}$ $\text{و} + \text{و} + \text{لا}$ مساوات ہوجاتی ہے $\text{ج} + \text{و} + \text{لا} = \text{و} + \text{و} + \text{لا} = \text{و} + \text{و} + \text{لا}$

جس سے ج = $\frac{1}{p}$ ، ک = $\frac{1}{a}$ اسلئے

خاص نمکھ = $\frac{1}{p}$ لا^۱ تو + و^۱ لا

و^۱ لا کے جواب میں خاص نمکھ کا جو حصہ ہے وہ صورت اول کے بلاد اسطہ استعمال سے
ماہل ہو سکتا ہے پھر نمکھ ہے شتم تفاعل + خاص نمکھ

= (ل + جب لا) تو + $\frac{1}{p}$ لا^۲ تو + و^۲ لا

صورت دوم - م = لی جب عدا لا + م جم عدا لا

آزمایشی حل اس صورت میں لو

ما = کی جب عدا لا + ف جم عدا لا
مندرج کرنے سے حاصل ہوتا ہے

(ب - عدا) - (ب - عدا) ف + (ب - عدا) ل = (ب - عدا) ف + (ب - عدا) ل + (ب - عدا) م جم عدا لا

= لی جب عدا لا + م جم عدا لا

اور مساوات پوری ہو گئی اگر

(ب - عدا) کی - (ب - عدا) ف = لی (ب - عدا) + (ب - عدا) ف = م

یا کی = $\frac{(ب - عدا) ل + (ب - عدا) م}{(ب - عدا) ف} = \frac{(ب - عدا) ل + (ب - عدا) م}{(ب - عدا) ف}$

اگر لا = تو ماہل ہوتا ہے کی = $\frac{ل}{ب - عدا}$ ، ف = $\frac{م}{ب - عدا}$

لیکن یہ حل ناکام رہتا ہے اگر عدا = ب یعنی جب شتم تفاعل

لی جم عدا لا + کی جب عدا لا ہو۔ ایسی حالت میں
صورت دوم (لا) اگر لا = . اور عدا = ب تو آزمائش سے معلوم ہوگا کہ

خاص نمکھ = - $\frac{ل}{ب - عدا}$ لا جم عدا لا + $\frac{م}{ب - عدا}$ لا جب عدا لا

جہاں $س = لی جب عا لا + م جم عا لا$
 مثال ۲۔ مساوات (لا + گ لا + عا لا = ل جم (ن ت - عا)..... (۱)
 حرکت اور برقی نظریہ میں نمونہ کی مساوات ہے۔

متمم تفاعل معلوم کرنا آسان ہے۔ خاص نمونہ معلوم کرنے کے لئے آزمائش کے طور پر رکھو
 لا = ل جم (ن ت - عا) + ف جب (ن ت - عا)..... (۲)
 (۱) میں رکھنے سے حاصل ہوتا ہے

(- ن لا + گ ن ف + م ص) جم (ن ت - عا)
 + (- ن ف - گ ن ص + م ف) جب (ن ت - عا)
 = ل جم (ن ت - عا)

پس (۱) پوری ہوگی اگر
 (م ص - ن لا + گ ن ف = ل - گ ن ص + م ص - ن ف) =

اٹلے کا = $\frac{(م ص - ن لا + گ ن ف)}{(م ص - ن لا + گ ن ف)} = ۱$
 اس لئے خاص نمونہ = $\frac{(م ص - ن لا + گ ن ف)}{(م ص - ن لا + گ ن ف)} = ۱$
 { (م ص - ن لا + گ ن ف) }

$\frac{ل جم (ن ت - عا)}{(م ص - ن لا + گ ن ف)} =$ جہاں $س = م ص - ن$
 ل جم (ن ت - عا) =

اگر گ =۔ اور ن = م ص تو صورت دوم (۱) پیدا ہوتی ہے، اس حالت میں

خاص نمونہ = $\frac{۱}{ن} ت جب (ن ت - عا)$

صورت سوم۔ اگر $س = لا$ کا منطق صحیح تفاعل ہو تو امتحان کے طور پر مالے لئے
 ایک منطق صحیح تفاعل رکھ کر دیکھو، سروں کی قیمتیں ایسی ہونی چاہئیں کہ
 تفاعل مساوات ہو کر رہے۔

۶۲۔ ہمراہ مساواتیں۔ اب ہم چند مثالیں حل کریں گے جن سے معمولی

تفرقی ہمزاد مساواتوں کے تکمل کرنے کی توضیح ہوگی، واضح ہو کہ مساواتوں کی تعداد وہی ہونی چاہئے جو تابع متغیروں کی تعداد ہو۔ جمیت کو متغیر متبوع فرض کریں گے اور صرف دو تابع متغیروں لا، ما کے لئے بحث کو محدود رکھیں گے۔

مثال ۱۔ لا = سہ ما (۱)

ما = سہ لا (۲)
(۱) کو تفریق کرو اور (۲) سے ما کی قیمت سہ لا مندرج کرو اس طرح ایک معمولی تفرقی مساوات ایک تابع متغیر کی رقوم میں حاصل ہوگی، وہ یہ ہے
لا + سہ لا = جس کا حل ہے

لا = اجم سہت + جب جب سہت یا لا = ج جم (سہت - سہ) (۳)
ما کی قیمت اب (۲) سے حاصل ہو سکتی ہے یعنی

ما = اجم سہت + جب جم سہت یا ما = ج جب (سہت - سہ) (۴)
یہ امر توجہ کے قابل ہے کہ اگرچہ ا، ب بالکل اختیاری مستقل ہیں لیکن ما میں کے مستقل معین ہو جاتے ہیں جبکہ لا کے مستقلات کو معین کر دیا جائے، اگر (۱) میں صرف لا شریک ہوتا اور (۲) میں صرف ما تو لا میں کے مستقلات سے ما کے مستقل معین نہ ہوتے۔ مثلاً مساواتوں
لا + سہ لا =، ما + سہ ما =

سے حل ہوتا ہے لا = اجم سہت + جب جب سہت، ما = ج جم سہت + ف جب سہت اور مستقلوں ا، ب، ج، ف میں کوئی رشتہ نہیں۔

مثال ۲۔ لا + لا - لا - لا = ۳ ما (۱) ما + لا - لا = ۵ ما (۲)

(۱) کو تفریق کرو لا + لا - لا - لا = ۳ ما (۳)
(۱)، (۲)، (۳) سے ما، ما سا قطر کرنے سے حاصل ہوتا ہے

لا - لا + لا + لا = ۱۰ لا (۴)

جس کا نکتہ ہے لا = ۱۰ (۱) جم ۳ت + جب جب ۳ت (۵)
اب مساوات (۱) سے ما معلوم ہو سکتا ہے

ما = قو { (۲) (ب) جم ۳ ت + (۲) (ب) - (۱) جب ۳ ت } (۶)
 اگر (۱) اور (۲) دونوں میں لا، ما شامل ہوتے تو ہم دونوں مساواتوں (۱) اور (۲) کو تفریق کرتے اور چار مساواتوں (۱)، (۲)، (۳)، (۴) سے ہم ما، ما، ما، سا قف کر سکتے۔

مثال ۳۔ جیسا مثال بالا میں ذکر ہوا ہم ذیل کی مساواتوں پر غور کریں گے جو دو باہم اثر انداز برقی حلقوں کو منسلک کرتی ہیں۔

ل لا + م ما + ز لا = ج (۱)

م لا + ج ما + س ما = ق (۲)

لا، ما برقی رو میں ہیں، ل، ج ذاتی امالیتیں ہیں اور م، ان کی باہمی امالیت ہے، ز اور س مزاحمتیں ہیں اور ج اور ق خارجی محرکہ برقی قوتیں ہیں۔ حاصل ضرب ل، ج بڑا ہے مڑ سے۔

مثال ۲ کے موافق (۱) اور (۲) کو تفریق کرنے سے ہم ما، ما، ما، سا قف کر سکتے ہیں لیکن اس جگہ ایک اور طریقہ کی ہم تشریح کرتے ہیں۔ منظم تفاعل اور خاں متحکم کا اصول صیرحاً ہمراہی مساواتوں کی صورت میں بھی درست ہے۔ ج اور ق یا تو مستقل ہیں یا ت کے تفاعل ہیں اور ہم اصول مذکورہ کو (۱) اور (۲) پر استعمال کر سکتے ہیں۔

منظم تفاعل ذیل کی مساواتوں سے حاصل ہوتا ہے

ل لا + م ما + ز لا = (۳)

م لا + ج ما + س ما = (۴)

فرض کرو کہ لا = ل، قو، ما = ج، قو جہاں ل اور ج مستقل ہیں، (۳) اور (۴) میں مندرج کرنے سے حاصل ہوتا ہے۔

(ل لا + ز لا) + (م لا + ج ما) = (۵)

م لا + ل لا + (ج ما + س ما) = (۶)

اگر ہم (۵) اور (۶) سے نسبت لے: ب سا ق کر س تو اس امر کے لئے شرط حاصل ہوگی کہ (۵) اور (۶) دونوں ایک ساتھ پوری ہوتی ہیں، شرط یہ ہے
(ل + ز) (ن + لہ + س) - مڈ لہ =

یا (ل ن - مڈ) لہ + (ل س + ن ز) لہ + زس = (۷)
(۷) کی اصلیں حقیقی ہیں، کیونکہ

(ل س + ن ز) - (ل ن - مڈ) زس = (ل س - ن ز) لہ + مڈ زس
یعنی (۷) کا میسر مثبت ہے۔ نیز چونکہ ل ن کے مڈ (۷) کی اصلوں کی ایک ہی علامت ہے، دونوں منفی ہیں۔ اگر انہیں - لہ - لہ کہا جائے اور یہ

مستقل لہ اور ب لہ لے جائیں تو (۳) اور (۴) کے حل ذیل

حاصل ہونگے لا = لہ قو + لہ قو، ما = جب قو + جب قو لہ (۸)

ب لہ سے اور ب لہ سے مربوط ہے مساواتوں (۵) اور (۶) کے ذریعہ یعنی

ب لہ = لہ (ز - ل لہ) / جب = لہ (ز - ل لہ) / مڈ لہ

اگر ب اور ق مستقل ہوں تو خاص تکملے ہیں

لا = جب / ز، ما = ق / س

اور (۸) میں ان کو جمع کرنے سے (۱) اور (۲) کے پورے تکملے حاصل ہوتے

ہیں۔ دوسری مشہور صورت صرف وہ ہے جس میں ب = ع جم (ن ت - ع)

اور ق = ۔ اور خاص تکملہ ذیل کی قیمتوں کو آزمائشی مل فرض کرنے اور

اس طرح ع 'ف' گ 'ھ کی قیمتیں دریافت کرنے سے حاصل ہوگا۔

لا = ع جم (ن ت - ع) + ف جب (ن ت - ع)

ما = گ جم (ن ت - ع) + ھ جب (ن ت - ع)

پہ مساواتیں لا + ک ما + ج لا = ، ما - ک لا + ج ما = -
گردشی رقص کے لنگر کی چھوٹی حرکتوں کو تعبیر کرتی ہیں (گردش نما کا محور
تغویق کی سمت میں ہے) 'نیز یہ (یعین انشور) (Zeeman effect)
کے نظریہ میں مقناطیسی میدان کے اندر برقیہ کی حرکت کی ابتدائی مساواتیں
ہیں [ملاحظہ ہو گریسے کی کتاب مقناطیسیت اور برقیات حصہ اول
صفحہ ۵۶۵-۵۶۶ اس کتاب کے دسویں باب میں کئی علم آموز مثالیں ملے گی]

مشق ۱

(۱-۱۶) تک کی مساواتوں کو تکمل کرو۔

۱- (۱+ لا) عف ما = ۱+ ما

۲- ۱- لا عف ما = ۱- ما ۳- ما - لا عف ما = ۴- (ما + عف ما)

۴- (لا + ما) عف ما = ۵- لا عف ما = ۶- (لا + ما) عف ما

۶- (لا + ما) عف ما = ۷- لا عف ما = ۸- (لا + ما) عف ما

۷- (لا + ما) عف ما = ۸- لا عف ما = ۹- (لا + ما) عف ما

۸- (لا + ما) عف ما = ۹- لا عف ما = ۱۰- (لا + ما) عف ما

۹- (لا + ما) عف ما = ۱۰- لا عف ما = ۱۱- (لا + ما) عف ما

۱۰- (لا + ما) عف ما = ۱۱- لا عف ما = ۱۲- (لا + ما) عف ما

۱۱- (لا + ما) عف ما = ۱۲- لا عف ما = ۱۳- (لا + ما) عف ما

۱۲- (لا + ما) عف ما = ۱۳- لا عف ما = ۱۴- (لا + ما) عف ما

۱۳- (لا + ما) عف ما = ۱۴- لا عف ما = ۱۵- (لا + ما) عف ما

۱۴- (لا + ما) عف ما = ۱۵- لا عف ما = ۱۶- (لا + ما) عف ما

۱۵- (لا + ما) عف ما = ۱۶- لا عف ما = ۱۷- (لا + ما) عف ما

۱۶- (لا + ما) عف ما = ۱۷- لا عف ما = ۱۸- (لا + ما) عف ما

۱۷- (لا + ما) عف ما = ۱۸- لا عف ما = ۱۹- (لا + ما) عف ما

۱۸- (لا + ما) عف ما = ۱۹- لا عف ما = ۲۰- (لا + ما) عف ما

۱۹- (لا + ما) عف ما = ۲۰- لا عف ما = ۲۱- (لا + ما) عف ما

۲۰- (لا + ما) عف ما = ۲۱- لا عف ما = ۲۲- (لا + ما) عف ما

۱۷- (ما-ع لا) = رُ ع + ب ا ۱۸- ما = ع لا + ع ا
 ۱۹- لا (ما-ع لا) = ما ع ا
 مساواتوں (۲۰ تا ۲۷) کو حل کرو

۲۰- عفا ما - (ا + ب) عفا ما + ا ب ما = .

۲۱- عفا ما - ۵ عفا ما + ۶ عفا ما = .

۲۲- عفا ما - ۶ عفا ما + ۱۰ ما = جب ۲ لا

۲۳- عفا ما - ۳ عفا ما + ۲ ما = فو

۲۴- عفا ما + ن ما = ا ج م ن لا + ب جب ن لا

۲۵- عفا ما - ن ما = ا فو + ب فو

۲۶- عفا ما - ۶ عفا ما + ۱۳ ما = لا

۲۷- عفا ما + ۲ عفا ما + ما = .

۲۸ تا ۳۱ تک کی ہمزاد مساواتوں کو تکمل کرو [لا = فو لا]

۲۸- لا - ۷ لا + ما = ۰، ما - ۲ لا - ۵ ما = .

۲۹- لا + ما + ۲ لا + ما = ۰، ما + ۵ لا + ۳ ما = .

۳۰- لا + ۲ لا - ۳ ما = ت، ما - ۲ لا + ۲ ما = فو

۳۱- لا - ۳ لا - ۴ ما = ۰، ما + لا + ما = .

۳۲- مساواتوں لا = ۰، ما = ۰ ج کو تکمل کرو اور مستقلات کو معلوم کرو کہ

یہ شرائط پورے ہوں لا = ۰، ما = ۰، لا = و ج م عا، ما = و جب عا جیکت =

۳۳- مساواتوں لا = ۰، ما = ۰، لا = و ج م عا، ما = و جب عا جیکت =

معلوم کرو کہ یہ شرائط پورے ہوں لا = ۰، ما = ۰، لا = و ج م عا، ما = و جب عا جیکت =

۳۴- مساوات لا = ۰، ما = ۰ کو تکمل کرو اور ایسے مستقلات منتخب کرو کہ

لا = و = لا = جبکہ ت =
۳۵۔ مساوات عفا ما = و شہتیروں کی خمیدگی کے نظریہ میں
واقع ہوتی ہے، جب خمیدگی کی استواری ہے اور وزن ہے اکائی طول کا
ذیل کے شرائط کے ماتحت مساوات کو تکمل کرو

(۱) ما = عفا ما = جبکہ لا = اور جبکہ لا = ل
(۲) ما = عفا ما = جبکہ لا = اور جبکہ لا = ل
(۳) ما = عفا ما = جبکہ لا = اور عفا ما = جبکہ لا = ل
۳۶۔ ایک برق سے بھرے ہوئے کثف کی گنجائش ج ہے اس کی
تختیوں کو تار کے ذریعہ جس کی ذاتی امالیت ل ہے اور مزاحمت نہایت
ملا دیا گیا ہے، اگر وقت ت پر تختیوں کے درمیان قوتہ کافرق و ہو تو
و مساوات ذیل کو پورا کریگا

$$ج ل و + ز ج و + و =$$

اور برقی روجہ ہے۔ ج و ثابت کرو کہ ان بھرن اہتزازی
ہوگا اگر ج ز > ل اور مدت دوران ت

$$ت = \frac{2\pi L}{v} - \frac{L}{c} - \frac{L}{c}$$

اور قوتہ کا نوکارتی گھسار ہے $\frac{F}{L}$

۳۷۔ مساوات عفا ما + $\frac{1}{2}$ عفا ما + ما = کو تکمل کرو متغیر
مبتوع ما کو ع میں بدلنے سے جہاں ع = لا ما
پورا تکملہ معلوم کرو نیز قوتہ تکملہ معلوم کرو جو محدود و متبادل ہے جبکہ لا مال بہ صفر ہو۔
۳۸۔ ثابت کرو کہ لا عفا ما + لا عفا ما + ب ما = کا پورا تکملہ

۳۷ = لا + لا^۱ جب لا^۱ جہاں لا^۱ لا^۱ مساوات

لا^۱ (لا - لا) + لا^۱ + لا^۱ = ب = کی اصلیں ہیں۔

آزمائشی حل ۳۷ = لا^۱ اختیار کرو اور حسب دفعہ ۶۰ عمل کرو۔

۳۹ - ان مساواتوں کو تکمیل کرو

(۱) لا^۱ عفا^۲ ما + ۲ عفا^۲ ما = ۶ لا

(۲) لا^۱ عفا^۲ ما - ۳ لا^۱ عفا^۲ ما + ۶ لا^۱ عفا^۲ ما - ۶ ما = لا^۱

(۳) لا^۱ عفا^۲ ما - ۲ ما = لا

۴۰ - متغیر متبوع لا کو طہا میں بدلنے سے جہاں لا = قو^۱ مساوات
ذیل کو تکمیل کرو

لا^۱ عفا^۲ ما + لا^۱ عفا^۲ ما + ن^۱ ما =

مثال ۳۸ کی مساوات کے جواب میں لا کے لئے جو مساوات حاصل
ہوتی ہے اسکی اصلیں خیالی ہیں۔

۴۱ - تکمیل کرو $\frac{مر}{مر} = \left(\frac{مر}{مر} + \frac{مر}{مر} \right) = ۰$ کو

۴۲ - اس مساوات کو تکمیل کرو $\frac{فر}{فر} + \frac{فر}{فر} = \frac{فر}{فر}$

۴۳ - اس مساوات سے عفا^۲ ما معلوم کرو

عفا^۲ ما = ما { ۱ + (عفا^۲ ما) }

۴۴ - اگر ما = عو و جہاں عو و دونوں لا کے تفاعل ہیں تو دیکھا کہ

خطی مساوات عفا^۲ ما + ف عفا^۲ ما + ق ما = ص (۱)

ہو جاتی ہے وعو + (و + ف و) عو + (و + ف و) ق و + عو = ص (۲)

جہاں زیریں لا، مشتقوں کو تعبیر کرتی ہیں۔
 اگر مساوات (۱) کا حل ہو جبکہ ϵ صفر ہو تو ϵ کی قیمت (اور اس کے
 کی قیمت) دریافت ہو سکتی ہے کیونکہ اس حالت میں ϵ کا سر صفر ہے
 اور (۲) خطی مساوات ہے رتبہ اول کی جبکہ ϵ کو متغیر متنوع مانا جائے۔
 ۴۵۔ اس مساوات لا ϵ ف ϵ ما + لا ϵ ف ϵ ما - ما = لا ϵ کو تکمل کرو
 رکھو ما = لا ϵ



باب نہم

محدود تکملے۔ علامتِ تکمل کے اندر اعمال

۶۳۔ تکملہ کا تسلسل۔ تکملہ کی تعریف سے کہ یہ ایک رتبہ کا

ناپ ہے (دفعات ۸۲ حصہ اول، ۲۲ حصہ دوم) یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ جب
تکمل فار (لا) لا کی تمام زیر بحث قیمتوں کے لئے تسلسل ہو تو تکملہ

ی = کُ فار (لا) فرلا = کُ فار (ع) فرع (۱)

اپنی اوپر کی حد لا کا تسلسل تفاعل ہوتا ہے اور اس کا مشتق فار (لا) ہے۔

محدود تکملہ ہ = کُ فار (لا) درلا = کُ فار (لا) فرلا (۲)

اپنے حدود و اُب کا تفاعل ہے اور ہ کے مشتق بلحاظ ب اور لا کے

تکملہ کی تعریف کی رو سے، بالترتیب یہ ہیں

حرب = فار (ب) حرب = فار (ا) (۳)

لیکن جیسا کہ طبعی سوالات میں اکثر ہوتا ہے (ملاحظہ ہو دفعہ ۴۴ اور دفعہ

۴۹ مثال ۶ حصہ اول) کہ تکمل میں کوئی محدود عدم تسلسل اس نمونہ کا جو
شکل ۳۴ میں دکھایا گیا ہے لا کی قیمت مثلاً ح = ع = ج کے لئے ہوگا

تکملہ جبکہ لا = و م < و ع < و ا = لا
ذیل کی مساوات سے متعین ہوتا ہے

بھی = لا ذال (لا) فرلا = لا ذال (لا) مرلا + لا ذال (لا) فرلا

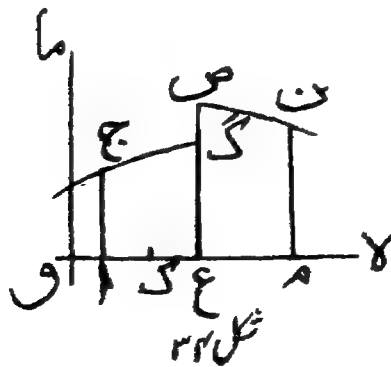
تکملہ ی اب بھی لا کا مسلسل تفاعل ہے لیکن فری غیر مسلسل ہے
لا = ج کے لئے۔ دفعہ ۴۴ حصہ اول میں جو ترقیم دی گئی ہے اس کے مطابق

[فری] [لا = ج۔۔] = ع گ [فری] [لا = ج۔۔] = ع ج + ج = ع ص

عدم تسلسل کو فار (ج + سہ) - فار (ج - سہ) کی انتہا سے ناپا جائیگا جبکہ
سہ اور سہ دونوں بلا واسطہ صفر کی طرف مال ہوں، اس صورت
میں انتہا گ ص ہے، اور عدم تسلسل کو محدود کہا گیا ہے کیونکہ
گ ص محدود ہے۔

اس طرح کے عدم تسلسل جیسے $\frac{1}{(لا - ج)}$ کو جبکہ لا = ج لا متناہی

کہا جائیگا کیونکہ فرق $\frac{1}{سہ} - \frac{1}{(لا - سہ)}$ کی انتہا لا متناہی ہے۔



دفعہ ۷ میں تکملہ کی تعریف کو وسعت دیکر ایسی صورتوں کو اس کی تعریف میں شامل کر لیا گیا ہے جہاں تکمیل میں لا انتہا عدم تسلسل ہو اور اس تعریف کی رو سے تکملہ تسلسل رہتا ہے۔ جب تکمیل میں لا انتہا عدم تسلسل ہو یا جب تکملہ کی ایک یا دونوں حدود لا متناہی ہوں تو تکملہ کو ہم غیر واجب یا لا متناہی تکملہ کہیں گے، اس باب کے خاص مضمون کی بحث شروع کرنے سے پہلے ہم غیر واجب تکملہ پر مختصر غور کر چکے، اس بحث میں باب پنجم کے تجلیات اور مصطلحات اکثر طور پر استعمال میں آئیں گے۔

۶۴۔ لا متناہی حدود۔ جب، \leq اور \geq کی ایسی قیمتوں کے لئے فاد (لا) تسلسل ہو تو تعریف (دفعہ ۷) کی رو سے

ک ف (لا) \leq فلا = نہا ک ف (لا) \geq فلا = نہا ف (لا) (۱)

بشرطیکہ \leq کے لئے یہ انتہا محدود ہو۔

اب دفعہ ۳۹ مسئلہ (۳) کی رو سے اس امر کے لئے ضروری اور کافی شرط کہ ف (لا) ایک معین انتہا کی طرف مائل ہو جبکہ لا مائل یہ لا متناہی ہو یہ ہے کہ فرق ف (ج) - ف (ب) مائل بہ صفر ہو جبکہ ب اور ج کسی طرح سے بھی مائل یہ لا متناہی ہوں۔ ایسی حالت میں

ف (ج) - ف (ب) = ک ف (لا) \leq فلا - ک ف (لا) \geq فلا = ک ف (لا) \leq فلا (۲)

پس تکملہ (۱) کا وجود ہو گا اگر (۲) کے موخر اند کر تکملہ کی انتہا کا وجود ہو جبکہ ب اور ج کسی طرح سے بھی مائل یہ لا متناہی ہوں۔ جب اس انتہا کا وجود ہو تو تکملہ (۱) کو مستند کہتے ہیں۔

اسی طرح اگر فاد (لا) تسلسل ہو جبکہ \leq اور \geq تو تکملہ

ک ف (لا) فرلا (۳)

مستق ہوگا بشرطیکہ تکملہ

+ ک ب ف (لا) درلا (۴)

کی انتہا صفر ہو جبکہ مثبت عدد ب، ج کسی طریقہ سے بھی مائل بہ لائن ہی ہوں۔ جب تکملہ کے حدود - ∞ اور + ∞ ہوں تو تکملہ مستق ہوتا ہے بشرطیکہ ذیل کے ہر ایک تکملہ

ک ف (لا) فرلا اور ک ب ف (لا) فرلا (۵)

کی انتہا صفر ہو جبکہ مثبت اعداد ب، ج، ب، ج کسی طریقہ سے بھی مائل بہ لائن ہی ہوں۔

ظاہر ہے کہ تکملہ (۱) کا استدقاق ف (لا) کے رویہ پر منحصر ہے جبکہ لاکو بہت بڑی قیمتیں دی جائیں (مقابلہ کرو نوٹ دفعہ ۲۰ کے ساتھ) جب کسی صورت میں نامحدود تکملہ حاصل ہو سکے تو استدقاق کے متعلق باسانی فیصلہ ہو سکتا ہے، ذیل کا مسئلہ کارآمد ثابت ہوگا جبکہ محدود تکملہ حاصل نہ ہو سکے۔

مسئلہ۔ فرض کرو کہ لاک کی بڑی قیمتوں کے لئے مثلاً جبکہ لا < ع تفاعل

ف (لا) اس شکل میں رکھا جاسکتا ہے $\frac{ف (لا)}{لا}$ ۔ اگر لا کی ہر ایسی قیمت

کے لئے جو مثلاً ع سے بڑی ہو ف (لا) تعداداً کم ہو ایک محدود عدد (۱) سے تو تکملہ (۱) مستق ہوگا بشرطیکہ ک < لا لیکن اگر لا کی ہر ایسی

قیمت کے لئے جو E سے بڑی ہو فدا (لا) ایک مثبت عدد جب سے ہمیشہ بڑا رہے یا ہمیشہ ایک منفی عدد۔ J سے کم رہے (جب اور J صفر نہیں ہیں) تو تکملہ (۱) مستحق نہیں ہوگا جبکہ $k \geq 1$ ثبوت باسانی دفعہ ۱۵ مسئلہ ۷ سے حاصل ہوتا ہے۔ اگر صرف عددی

قیمتوں کو ملحوظ رکھا جائے اور فا (لا) $\langle \frac{1}{a} \text{ جبکہ لا } \rangle E$ تو

$$k \text{ فا (لا) فرلا } \langle \frac{1}{a} \text{ جبکہ لا } \rangle = \frac{1}{k} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a} \right) \text{ جبکہ لا } \langle \frac{1}{a} \text{ جبکہ لا } \rangle$$

جب a اور J مائل بہ لاتناہی ہوں تو یہ انتہا صفر ہوتی ہے اگر $k > 1$ اتناہی کی صورت بھی اسی طرح ثابت ہوتی ہے۔

لاتناہی حدود کی اور صورتوں کے لئے بھی اسی طرح کا مسئلہ صادق آئیگا۔

مطلق اور مشروط استدقاق۔ کسی تکملہ کو مطلق طور پر مستحق

کہا جائیگا اگر یہ اس صورت میں بھی مستحق رہے جبکہ تکمیل فا (لا) کی بجائے اسکی عددی قیمت فا (لا) رکھ دی جائے۔ اگر کوئی مستحق تکملہ تکمیل فا (لا) کی بجائے اسکی عددی قیمت فا (لا) رکھنے سے مستحق نہ رہے تو اسکو مستحق بالشرط کہینگے۔

مثال ۱۔ تکملہ $k \text{ جب لا فرلا } \langle \frac{1}{a} \text{ جبکہ لا } \rangle$ کا استدقاق مشروط ہے۔

مسئلہ بالا اس صورت میں سیدھا نہیں لگ سکتا (اگرچہ تکمیل بالخصص کے بعد ممکن ہے لگ سکے) لیکن مثال ۲۳ مشق ۵ کی روش سے اگر

$$n \text{ جب } \langle \frac{1}{a} \text{ جبکہ لا } \rangle (n+1) \text{ تو}$$

$$k \text{ جب لا فرلا } \langle \frac{1}{a} \text{ جبکہ لا } \rangle = \frac{1}{k} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a} \right) \text{ جبکہ لا } \langle \frac{1}{a} \text{ جبکہ لا } \rangle$$

۶۵۔ لامتناہی متکمل۔ اگر فار (لا) مسلسل ہو لا = ۱ + صہ (صہ)۔
 سے لا = ب تک لیکن فار (۱ + صہ) کی انتہا لامتناہی ہو جبکہ صہ مائل
 بہ صفر ہو تو (دفعہ ۱) کی رو سے

فار (لا) فرلا = نس۔
 فار (لا) فرلا = نس + صہ
 (۱)۔

بشرطیکہ یہ انتہا ایک معین مقدار ہو۔
 اب فار (لا) کی انتہا معین مقدار ہوگی اگر فار (۱ + صہ)۔ فار (۱ + صہ)
 صفر کی طرف مائل ہو جبکہ مثبت مقدار میں صہ، صہ کسی طریقہ سے
 بھی مائل بہ صفر ہوں۔ پس تکملہ (۱) مستحق ہوگا اگر تکملہ

فار (لا) فرلا = نس + صہ
 فار (لا) فرلا = نس + صہ
 مائل بہ صفر ہو جبکہ صہ، صہ کسی طریقہ سے بھی صفر کی طرف مائل ہو۔
 اسی طرح سے تکملہ کے معنی اس صورت میں متعین ہو سکتے ہیں جبکہ
 فار (لا) مائل بہ لامتناہی ہو جبکہ لا، ب کی طرف متقی ہو یا قسمت ج
 کی طرف مستحق ہو جہاں ج، ۱ اور ب کے درمیان واقع ہے۔
 (دیکھو دفعہ ۱، نیز صفحہ ۲۹۶ کی مثال ۲)

مسئلہ۔ اگر لا = ۱ سے لا = ب تک متکمل فار (لا) اس شکل کا فار (لا)
 کا ہو جہاں فار (لا) مسلسل ہے لا = ۱ سے لا = ب تک تو تکملہ (۱)
 مستحق ہوگا بشرطیکہ $1 > ۱$ لیکن جب، فار (۱) صفر نہ ہو
 تکملہ مستحق نہیں ہوگا اگر $1 \leq ۱$ ۔

عدم تسلسل کی اور صورتوں کے لئے اسی طرح کا مسئلہ درست ہوگا ثبوت
 فوراً مسئلہ ۱۵ دفعہ ۱۵ سے حاصل ہوتا ہے (لاحظہ ہو دفعہ ۱۵ کا آخری حصہ)
 مثال ۱۔ تکملہ $\frac{1}{2}$ جب لا $\frac{1}{2}$ جس میں ب < . مستحق ہوا اگر $\frac{1}{2}$

ہم لکھ سکتے ہیں فدا (لا) = $\frac{1}{2}$ جب لا ، تکمل اس صورت میں ہوگا

فدا (لا) پس تکمہ مستحق ہوگا اگر $\frac{1}{2}$ یا $\frac{1}{2}$ اگر ہم لیں فدا (لا) =

جب (لا) تو یہ قید کہ فدا (لا) کو صفر نہیں ہونا چاہئے عائد ہوتی ہے۔

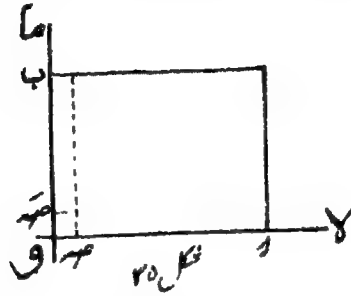
مثال ۲۔ تکملہ $\frac{1}{2}$ جب لا $\frac{1}{2}$ جس میں ب < . مستحق ہوگا اگر $\frac{1}{2}$

اس صورت میں فدا (لا) = جم لا۔
 دوسرے بغیر واجب تکملوں کی بحث فرا زیادہ مشکل ہے۔ جب تکمل لاستناہی ہوتا
 ہو ایک یا زیادہ الگ الگ نقطوں پر یا کسی ایک سطح کے ہر ایک نقطہ پر جو
 تکمل کے رقبہ کے اندر یا اس کے حدود پر واقع ہو تو رقبہ کو ذرا سا بیکر لینا چاہئے کہ
 ایسے نقطے رقبہ سے خارج ہو جائیں۔ اب چونکہ تکمل اس لئے رقبہ پر تسلسل ہے
 اس لئے تکمل کی قیمت اس پر محدود حاصل ہوگی اور یہ ممکن ہے کہ جب اس تکمل
 ہوئے رقبہ کو توسیع دیکر اصلی رقبہ پر انتہا میں منطبق کیا جائے تو اس محدود قیمت
 تکمل کی انتہا ایک معین مقدار ہو اگر ایسا ہو تو اس انتہا کو ہم اصلی تکمل کی قیمت
 تسلیم کرینگے۔ ذیل میں ہم دو مثالیں درج کرتے ہیں، ایسے تکملوں کی مفصل بحث
 اس کتاب کے حدود سے باہر ہے۔

مثال ۳۔ $\frac{1}{2}$ قرا $\frac{1}{2}$ (ب لا ب ق ما) ، و ب پ ، ق سب مثبت ہیں

لا = ۱۰ ما = ۲۰ پر شکل لاستناہی ہے، لیکن رقبہ تکمل کے کسی اور نقطہ پر لاستناہی
 نہیں ہے پس سدا کے پاس ایک چھوٹا مستطیل بنانے سے جس کے ضلع ضہ ۱۰ صہ

ہیں ہم مبدأ کو رقبہ تکمل سے خارج کر دیتے ہیں۔ اس نئے رقبہ پر تکمل کی قیمت حسب ذیل ہے (شکل ۲۵)



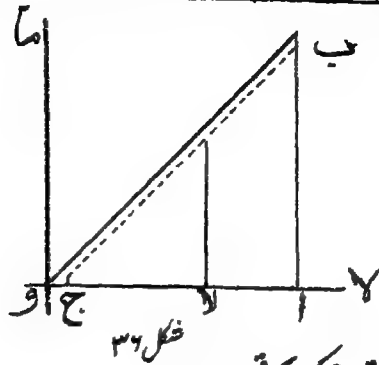
$$\frac{1}{(پ + لا + ق + ما)} + \frac{1}{(پ + لا + ق + ما)} =$$

$$\frac{1}{(پ + لا + ق + ما)} = \frac{1}{(پ + لا + ق + ما)} + \frac{1}{(پ + لا + ق + ما)} =$$

اگر $۲ > ۱$ تو یہ جملہ ایک معین انتہائی طرف مستند ہوتا ہے جبکہ صہ صہ کسی طور بھی صفر کی طرف مائل ہوں۔ اگر $۲ = ۱$ تو تکمل میں کو کار تم شریک ہوتے ہیں جو معین انتہائی طرف مائل نہیں ہوتے۔ اگر $۱ < ۲$ تو یہ جملہ لامتناہی ہو جاتا ہے۔ پس دیا ہوا تکمل مستند ہے اگر $۲ > ۱$ ۔ یہ ظاہر ہے کہ اگر تکمل فدا (لا + ما) ہوتا جہاں فدا (لا + ما) مسلسل ہے تو بھی یہ تکمل مستند ہوتا۔

مثال ۴۔ $\frac{1}{(پ + لا + ق + ما)}$ جہاں $۱ < ۲$ ۔

تکمل کا رقبہ مثلث متساوی الساقین ۱ (ب) (شکل ۳۶) ہے
 $۱ = ۱$ (ب) شکل لامتناہی ہے خط ۱ کے ہر ایک نقطہ پر
 اس لئے ہم ۱ کے متوازی اور ۱ پر عمود وار نقطہ وار خط کھینچنے
 سے خط ۱ کو خارج کر دیتے ہیں۔ ظاہر ہے کہ ۱ کے متوازی خط پر
 معین لا۔ صہ ہے اور $۱ = ج = ما$



فصل ۳۶

اس سطر سے ہوئے رقبہ پر تکملہ کی قیمت ہے

$$\frac{\text{فرما} - \frac{\text{حاصہ} - \text{عاصہ}}{\text{ا} - \text{ن}}}{\frac{\text{لا} - \text{ما}}{\text{ا} - \text{ن}} - \frac{\text{لا} - \text{فلا}}{\text{ا} - \text{ن}}} = \frac{\text{فرما} - \frac{\text{حاصہ} - \text{عاصہ}}{\text{ا} - \text{ن}}}{\frac{\text{لا} - \text{ما}}{\text{ا} - \text{ن}} - \frac{\text{لا} - \text{فلا}}{\text{ا} - \text{ن}}}$$

اگر $\text{ا} > \text{ا}$ اور صورت اسی صورت میں جبکہ $\text{ا} > \text{ا}$ اس جگہ کی انتہا ایک معین مقدار ہوگی جبکہ عاصہ بلا واسطہ صفر کی طرف مائل ہوں۔ پس دیا ہوا تکملہ اور اسی طرح سے تکملہ $\frac{\text{فلا} - \text{ما}}{\text{ا} - \text{ن}}$ جہاں فلا ما تمام رقبہ $\text{ا} - \text{ن}$ کے اندر مسلسل ہو سکتی ہوگا اگر $\text{ا} > \text{ا}$ ۔

۶۶۔ دو مشہور تکمیلے۔ ذیل میں جب $\frac{\text{ا}}{\text{ن}}$ کے جو جملہ دیا گیا ہے اس کے ثبوت کے لئے طالب علم دیکھے کہ سٹیل کا جبر و مقابلا حصہ دوم تیسواں باب دفعہ ۱۰ یا ہالسن کی کتاب علم مثلث دفعہ ۲۹۵۔ $\frac{\text{ا}}{\text{ن}}$ کوئی قیمت اختیار کر سکتا ہے ہوائے صفر اور ن کے جہاں ن مثبت صحیح عدد ہے۔

$$\frac{\text{ا}}{\text{ن}} = \frac{\text{ا}}{\text{ن}} + \sum_{\text{ن}}^{\infty} (1 - \frac{\text{ا}}{\text{ن}})^{\text{ن}} \left(\frac{\text{ا}}{\text{ن}} + \frac{\text{ا}}{\text{ن} + 1} \right)$$

$$\sum_{\text{ن}}^{\infty} (1 - \frac{\text{ا}}{\text{ن}})^{\text{ن}} \left(\frac{\text{ا}}{\text{ن}} + \frac{\text{ا}}{\text{ن} + 1} \right) \dots \dots \dots (1)$$

(۱) میں فرض کرو کہ $\text{ا} = \text{ع}$ جہاں ع کسر واجب ہے۔ تو حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{ع}}{\text{ع}} = \sum_{\text{ن}}^{\infty} (1 - \frac{\text{ا}}{\text{ع}})^{\text{ن}} \left(\frac{\text{ا}}{\text{ع}} + \frac{\text{ا}}{\text{ع} + 1} \right) \dots \dots \dots (2)$$

$$(ا) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

دفعہ ۲ کی مثال ایسے رکھو $b = (n+1)\pi$ ایسا انتخاب جائز ہے کیونکہ b کسی طور سے بھی مائل بہ لانتنا ہی ہو سکتا ہے۔ اسلئے

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} = \left\{ \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{(n-1)^2} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \dots \right\}$$

$$اب \quad \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}$$

$$\text{کیونکہ اندراج } \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}$$

$$\text{اسلئے } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} = \left\{ \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{(n-1)^2} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \dots \right\}$$

$$+ \left(\frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{(n+2)^2} \right)$$

$$= \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\text{اوپر ہم نے یہ تسلیم کر لیا ہے کہ } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

$$+ \left(\frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{(n+2)^2} \right)$$

$$= \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(k+1)^2} + \frac{1}{k^2} \right) \right\} \text{ جب } \epsilon \text{ فرء}$$

 یہ مفروضہ جائز ہے کیونکہ یہ آسانی سے ثابت ہو سکتا ہے کہ سو خرا ل ذکر شکل
 یکساں طور پرستی سلسلہ ہے۔

نتیجہ صریح $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$ جب $\epsilon > 0$ اگر $\epsilon < 0$ ۔

$-\frac{\pi^2}{6} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ اگر $\epsilon > 0$ ۔

$0 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ اگر $\epsilon = 0$ ۔

اگر $\epsilon < 0$ ۔ تو ابدال $\epsilon = 0$ فاک کے ذریعہ تکملہ وہی ہو جاتا ہے جو اوپر حاصل
 کیا گیا۔
 اگر $\epsilon > 0$ ۔ تو تکملہ مساوی ہے

$-\frac{\pi^2}{6} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ جب $\epsilon > 0$ ۔

یہاں $\epsilon = 0$ ۔ مثبت مقدار۔ اگر $\epsilon = 0$ ۔ تو شکل کا ہر جزو صفر ہو گا
 تکملہ صفر ہے۔ اس لئے تکملہ کا غیر مسلسل تفاعل ہے۔

(ب) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$ جب $\epsilon > 0$ ۔ اگر $\epsilon > 0$ ۔

شکل کو ان شکلوں میں لکھا جاسکتا ہے

$\epsilon = 0$ ۔ کے نزدیک $\frac{1}{k^2} \times \frac{1}{k^2} = \frac{1}{k^4}$ کے نزدیک $\frac{1}{k^2} \times \frac{1}{k^2} = \frac{1}{k^4}$

اس لئے استنتاج کے لئے ضروری ہے کہ $\epsilon > 0$ ۔
 تکملہ کو اگر ت سے تعبیر کریں تو

$$ت = \int_1^{\infty} \frac{x^{1-\epsilon}}{x+1} dx + \int_1^{\infty} \frac{x^{1-\epsilon}}{x+1} dx$$

دوسرے تکملہ میں رکھو لا = $\frac{1}{\epsilon}$ تو حاصل ہوگا

$$\int_1^{\infty} \frac{x^{1-\epsilon}}{x+1} dx = \int_1^{\infty} \frac{x^{1-\epsilon}}{x+1} dx = \int_1^{\infty} \frac{x^{1-\epsilon}}{x+1} dx$$

$$پس ت = \int_1^{\infty} \frac{x^{1-\epsilon}}{x+1} dx$$

$$اب \frac{1}{x+1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k$$

$$لیکن \int_1^{\infty} (x^{1-\epsilon} + x^{1-\epsilon}) dx = \frac{1}{\epsilon} + \frac{1}{\epsilon} = \frac{2}{\epsilon}$$

$$پس ت = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \int_1^{\infty} x^k dx = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+1} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{2}{k+1}$$

جیسے ن لاتنا ہی کی طرف مائل ہوتا ہے سو خرا لڈ کر تکملہ صفر کی طرف متدق

ہوتا ہے کیونکہ یہ کم ہے ذیل کے تکملہ سے

$$\int_1^{\infty} (x^{1-\epsilon} + x^{1-\epsilon}) dx = \frac{1}{\epsilon} + \frac{1}{\epsilon} = \frac{2}{\epsilon}$$

$$اسلئے ت = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+1} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{2}{k+1}$$

پیدا تفاعلوں کو گافا تفاعلوں کی رقوم میں بیان کرنے سے اوپر یہ ملحوظ رکھنے سے کہ جہاں $(\frac{1}{p}) = \frac{1}{p}$ ہمیں مساوات ب حاصل ہوتی ہے۔
۶۸۔ اوسط قیمت کا دوسرا مسئلہ۔ مشق ۵، مسئلہ ۳، ۳۱

میں اس مسئلہ کا حوالہ دیا گیا ہے۔ چونکہ محدود تکملوں کی بحث میں یہ اس کی اہمیت رکھتا ہے، اس لئے اب ہم اسے ثابت کرینگے۔ یہاں پر چند الفاظ ایسے تفاعل کے متعلق بیان کر دینا مناسب ہوگا جو اپنی وجہ یا دلیل بن گئے ہونے سے یا تو بھی نہیں کھٹایا کھینچی نہیں پڑتا۔ ایسے تفاعل کو ہم کریک (Monotonic) کہینگے اس مسئلہ کا ثبوت ذیل کے سادہ سے تمہیدیہ پر منحصر ہے جسے ایسل کی لائٹسادی کے نام سے موسوم کرتے ہیں۔
تھیل دیہا اگر رکی تمام قیمتوں کے لئے جون کے مساوی ہوں یا اس کم ہوں جہاں ن کوئی صحیح عدد ہے

$$1 < e_1 + e_2 + \dots + e_n + e_{n+1} < b$$

جہاں e_1, e_2, \dots, e_n کوئی حقیقی مقادیر ہیں اور اگر d_1, d_2, \dots, d_n مثبت مقادیر کا نہ بڑھنے والا نواثر ہو تو

$$1 < d_1 + d_2 + \dots + d_n + d_{n+1} < b$$

اعداد d_1, d_2, \dots, d_n ایک نہ بڑھنے والا نواثر بنائینگے اگر اس کا ہر ایک عدد اپنے بعد کے عدد سے بڑا ہو یا اس کے مساوی ہو۔ اسی طرح نہ گھٹنے والا نواثر وہ ہوگا جس میں کا ہر ایک عدد اپنے بعد کے عدد کی نسبت کم ہو یا اس کے مساوی ہو۔ اس تمہیدیہ کو ثابت کرنے کے لئے فرض کر دو کہ

$$s_1 = e_1 + e_2 + \dots + e_n + e_{n+1} < b$$

$$e_1 = s_1, e_2 = s_2 - s_1, e_3 = s_3 - s_2, \dots, e_n = s_n - s_{n-1}, e_{n+1} = s_{n+1} - s_n$$

.....
 کی قیمتیں س، س، کی رقوم میں درج کرو۔ اس طرح حاصل ہوگا

$$s = s_1 + s_2 + \dots + s_{n-1} + s_n$$

$$= (1 - \frac{1}{2})^n + (1 - \frac{1}{2})^{n-1} + \dots + (1 - \frac{1}{2})^1 + (1 - \frac{1}{2})^0$$

فرق ۱۔ ۲۔ ۳۔ ۴۔ یا تو سب مثبت ہیں یا صفر ہیں اور ہر ایک مقدار ۱، ۲، ۳، ۴، کم ہے ۱ سے اور بڑی ہے ۴ سے۔ اسلئے

$$س \{ \frac{1}{2} + (\frac{1}{2} - \frac{1}{2}) + \dots + (\frac{1}{2} - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{2}) \}$$

لیکن $\{ (1-\frac{1}{2}) + (\frac{1}{2}-\frac{1}{3}) + \dots + (\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}) + \frac{1}{n} \}$

یعنی اے سائے آب

اگر a اور b کے درمیان ϕ ایک اوسط قیمت ہو تو

س = ط

مسئلہ ۱۔ اگر تمام وقفہ ۱ \geq ۲ \geq ۳ میں متقابل فضا (۱) مسئلہ مثبت اور نہ بڑھنے والا ہو اور اگر سب (۱) اس وقفہ میں مسئلہ ہو تو

ف (لا) س (لا) م (لا) = ف (لا) س (لا) م (لا)

جہاں اے ضیا ہے ب۔

وقفہ (ا'ب) کو ن حصوں (ا'ام)، (ا'لام)، (ا'لا)، (ب'لا)، (ب'م) میں تقسیم کرو

مجموعہ اس شکل کا ہوگا

فص (۱) فص (۱) سا (۱) فلا
اب ہم ثابت کریں گے کہ جب صفر کی طرف مائل ہوتا ہے جبکہ ن لائن ہی
کی طرف مائل ہو، ایسی حالت میں وقفہ (۱) (۱) بھی ساتھ ہی صفر کی
طرف مائل ہوتا ہے۔ وقفہ (۱) (۱) کے اندر فرق فص (۱) - فص (۱)
یا مثبت ہوگا یا صفر اور (وقفہ ۱۵ مسائل ۶، ۷)

اجب $\sum_{r=1}^n \{ \text{فص (۱)} - \text{فص (۱)} \} | \text{سا (۱)} | \text{فلا}$

$> \sum_{r=1}^n \{ \text{فص (۱)} - \text{فص (۱)} \} | \text{سا (۱)} | \text{فلا}$

اب ہم ن کو اتنا بڑا منتخب کر سکتے ہیں (اور ہر وقفہ کو اتنا چھوٹا) کہ درجی
ہر قیمت کے لئے متحمل

سا (۱) فلا

کسی معینہ، اختیاری طور پر چھوٹے مثبت عدد صہ سے کم ہو۔ ایسا کرنے
سے حاصل ہوتا ہے

اجب $\sum_{r=1}^n \{ \text{فص (۱)} - \text{فص (۱)} \} | \text{صہ} | \text{فص (۱)} - \text{فص (۱)} |$
پس معلوم ہوا کہ جب کی اتنا صفر ہے اور مسئلہ ثابت ہوا۔

$$\frac{\text{جم اولہ}}{\text{لا}} = \frac{1}{\text{لا}} \times \text{جم اولہ} + \frac{1}{\text{لا}} \times \text{جم اولہ} + \dots + \frac{1}{\text{لا}} \times \text{جم اولہ}$$

$$\frac{\text{جم اولہ}}{\text{لا}} = \frac{\text{جم اولہ}}{\text{لا}} + \frac{\text{جم اولہ}}{\text{لا}} + \dots + \frac{\text{جم اولہ}}{\text{لا}}$$

اسلئے یہ تعداد کم ہے $\frac{2}{\text{لا}} + \frac{2}{\text{لا}} + \dots$ سے۔ پس اگر $\text{لا} < 2$ تو

اور کم کے لامتناہی کی طرف مائل ہونے سے یہ انتہا صفر ہوتی ہے۔ اسی طرح ہم دیکھتے ہیں کہ مستحق ہے۔

مثال ۲۔ مشتق ۱۲ سوالات ۱۴، ۱۵ کو ثابت کرنے کے لئے ایبل کی لاتساوی استعمال کرو۔

سوال ۱۴ کو لو۔ فرض کرو کہ

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$$

ایبل کی لاتساوی میں فرض کرو کہ $\frac{1}{n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$ ، $\text{جم} (n+1) = \text{جم} (n) + \frac{1}{n+1}$

$$\text{تب } \frac{1}{n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$$

اگر $\text{جم} (n) = \frac{1}{n}$ ہو اور نہ ہی یہ $\frac{1}{n}$ کا ضعف ہو تو $\text{جم} (n) = \frac{1}{n}$ کی ہر قیمت

کے لئے محدود ہوتا ہے، مثلاً فرض کرو کہ $\text{جم} (n) = \frac{1}{n}$ کم ہے ج سے۔ اسلئے $\text{جم} (n) = \frac{1}{n}$

کم ہے $\frac{1}{n}$ سے اور جب $\text{جم} (n)$ لامتناہی کی طرف مائل ہو تو $\text{جم} (n) = \frac{1}{n}$

ہر قیمت کے لئے یہ صفر کی طرف مستحق ہوتا ہے۔ پس سلسلہ مجوزہ

مستحق ہے۔

مشق ۱۸

۱- اگر $\frac{1}{n}$ اور $\frac{1}{m}$ دونوں مثبت ہوں تو ثابت کرو کہ مکملہ

$$\int_0^1 \frac{1}{x} dx = \int_0^1 \frac{1}{x} dx$$

مساوی ہے $\frac{1}{n}$ کے اگر $\frac{1}{n}$ بڑا ہو $\frac{1}{m}$ سے اور صفر کے مساوی ہے اگر $\frac{1}{n}$ چھوٹا ہو $\frac{1}{m}$ سے اور یہ مکملہ $\frac{1}{n}$ مساوی ہے اگر $\frac{1}{n} = \frac{1}{m}$

۲- ثابت کرو کہ (۱) $\int_0^1 \frac{1}{x} dx = \frac{1}{n}$ (۲) $\int_0^1 \frac{1}{x} dx = \frac{1}{m}$ (۳) $\int_0^1 \frac{1}{x} dx = \frac{1}{n}$

۳- ذیل کے تخمینات کو مرشم کرو

(۱) $\int_0^1 \frac{1}{x} dx = \frac{1}{n}$ (۲) $\int_0^1 \frac{1}{x} dx = \frac{1}{m}$

۴- اگر n مثبت صحیح عدد ہو تو ثابت کرو کہ

$$\int_0^1 \frac{1}{x} dx = \frac{1}{n} \times \frac{(1-n)^2 \dots \times 5 \times 3 \times 1}{n^2 \dots \times 4 \times 2 \times 1} = \frac{1}{n}$$

۵- اگر $e > 1$ تو ثابت کرو کہ

$$\int_0^1 \frac{1}{x} dx = \frac{1}{n} \times \frac{e^{-1} - e^{-n}}{1 - e^{-1}} = \frac{1}{n}$$

دفعہ ۶۶ (ب) کے موافق عمل کرو اور ذیل کا نتیجہ استعمال کرو [دفعہ ۸۴، مثال (۵)]

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{e-n} - \frac{1}{e+n} \right) = \frac{1}{e}$$

۶- ذیل کی مساواتیں قائم کرو۔ یہ سب دفعہ ۶۶، (ب) کے استحالیہ سے حاصل ہوتی ہیں یا مثال (۵) سے۔

$$(۱) \int_0^{\infty} \frac{1 - e^{-x}}{1 + e^{-x}} dx = \frac{\pi}{2} \quad \text{مُن مثبت صحیح عدد ہیں}$$

$$(۲) \int_0^{\infty} \frac{1 - e^{-x}}{1 + e^{-x}} dx = \frac{\pi}{2} \quad \text{اور } m > n \quad \int_0^{\infty} \frac{1 - e^{-x}}{1 + e^{-x}} dx = \frac{\pi}{2} \quad \text{قط } \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0 \quad \text{ا } n > 1$$

$$(۳) \int_0^{\infty} \frac{1 - e^{-x}}{1 + e^{-x}} dx = \frac{\pi}{2} \quad \text{م } (m, n) \text{ م } (m, n) : \quad \frac{1}{2} > \frac{1}{2} > \frac{1}{2}$$

$$(۴) \int_0^{\infty} \frac{1 - e^{-x}}{1 + e^{-x}} dx = \frac{\pi}{2} \quad \text{قط } \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0 \quad \text{ا } n > 1$$

$$(۵) \int_0^{\infty} \frac{1 - e^{-x}}{1 + e^{-x}} dx = \frac{\pi}{2} \quad \text{مس } \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0 \quad \text{ا } n > 1$$

$$(۶) \int_0^{\infty} \frac{1 - e^{-x}}{1 + e^{-x}} dx = \frac{\pi}{2} \quad \text{جم } \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0 \quad \text{ا } n > 1$$

۷۔ ثابت کرو کہ اگر $e > 1$ تو

$$\int_0^{\infty} \frac{1 - e^{-x}}{1 + e^{-x}} dx = \frac{\pi}{2} \quad \text{لوک } (1 + e^{-x})$$

۸۔ ثابت کرو کہ [ملاحظہ ہو دفعہ ۸۴ مثال ۲ (۶)]

$$\int_0^{\infty} \frac{1 - e^{-x}}{1 + e^{-x}} dx = \frac{\pi}{2} \quad \text{مس } \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0$$

۹۔ اگر ن مثبت صحیح عدد ہو تو ثابت کرو کہ [ملاحظہ ہو مثال ۶ مشق ۱۸]

کے لا لوک (جب لا) فرلا = ن لا لوک (۱/۲)
 اشلہ ۱۲۱۰ مناسب ابدالوں سے گامات فاعلوں میں تحویل ہو سکتی ہیں۔

$$-۱۰ \quad \frac{\text{لا}^{\text{ن}} \text{لا}^{\text{ن}} \text{فرلا}}{\text{ن جب ن}} = \frac{\text{لا}^{\text{ن}} \text{لا}^{\text{ن}} \text{فرلا}}{\text{ن جب ن}}$$

$$-۱۱ \quad \frac{\text{لا}^{\text{ن}} \text{لا}^{\text{ن}} \text{فرلا}}{\text{ن جب ن}} = \frac{\text{لا}^{\text{ن}} \text{لا}^{\text{ن}} \text{فرلا}}{\text{ن جب ن}}$$

$$-۱۲ \quad \frac{\text{لا}^{\text{ن}} \text{لا}^{\text{ن}} \text{فرلا}}{\text{ن جب ن}} = \frac{\text{لا}^{\text{ن}} \text{لا}^{\text{ن}} \text{فرلا}}{\text{ن جب ن}}$$

$$-۱۳ \quad \frac{\text{لا}^{\text{ن}} \text{لا}^{\text{ن}} \text{فرلا}}{\text{ن جب ن}} = \frac{\text{لا}^{\text{ن}} \text{لا}^{\text{ن}} \text{فرلا}}{\text{ن جب ن}}$$

$$-۱۴ \quad \frac{\text{لا}^{\text{ن}} \text{لا}^{\text{ن}} \text{فرلا}}{\text{ن جب ن}} = \frac{\text{لا}^{\text{ن}} \text{لا}^{\text{ن}} \text{فرلا}}{\text{ن جب ن}}$$

$$-۱۵ \quad \frac{\text{لا}^{\text{ن}} \text{لا}^{\text{ن}} \text{فرلا}}{\text{ن جب ن}} = \frac{\text{لا}^{\text{ن}} \text{لا}^{\text{ن}} \text{فرلا}}{\text{ن جب ن}}$$

$$-۱۶ \quad \frac{\text{لا}^{\text{ن}} \text{لا}^{\text{ن}} \text{فرلا}}{\text{ن جب ن}} = \frac{\text{لا}^{\text{ن}} \text{لا}^{\text{ن}} \text{فرلا}}{\text{ن جب ن}}$$

$$-۱۷ \quad \frac{\text{لا}^{\text{ن}} \text{لا}^{\text{ن}} \text{فرلا}}{\text{ن جب ن}} = \frac{\text{لا}^{\text{ن}} \text{لا}^{\text{ن}} \text{فرلا}}{\text{ن جب ن}}$$

دی ہوئی مقدار صہ سے کم ہو اور جہاں صہ کا مفہوم حسب معمول ہے) جبکہ لا۔ لا۔ اور ایا۔ یا۔ میں سے ہر ایک عا کے کم ہو۔ اگر لا، یا کی بجائے قیمتوں کا اور جوڑا لا، یا کیا جائے تو بالعموم ہمیں عا کی ایک اور نئی قیمت منتخب کرنا ہوگی۔ اب فا، لا، یا کے کیساں تسلسل کا یہ مفہوم ہے (مقابلہ کرو وقفہ ۴۲ کے ساتھ) کہ جب صہ سقرر کر لیا جائے تو ہمیشہ ایک عا معلوم ہو سکتا ہے اس طور پر کہ فرق (۲) صہ سے کم ہو بشرطیکہ لا۔ لا۔ اور ایا۔ یا۔ میں سے ہر ایک عا سے کم ہو خواہ جوڑا لا، یا کسی طور پر بھی منتخب کیا جائے۔

[جب لا = ایا یا اور یا = ایا یا تو جو ضروری تریات حل میں لانا چاہیں ہم انہیں طالب علم پر چھوڑتے ہیں۔]

یہ ہم مان لینے کے تسلسل کیساں ہے۔
ف (ما) کا تسلسل ہم آسانی سے ثابت کر سکتے ہیں۔ کیونکہ

ف (ما + ہ)۔ ف (ما) = ف (فار لا + ما + ہ)۔ فار لا (ما) اور لا (۳)۔

خواہ لا کی وقفہ (ا ب) کے اندر کوئی سی قیمت ہو ہم ہ کو ہمیشہ اس قدر چھوٹا منتخب کر سکتے ہیں کہ فار لا، ما + ہ)۔ فار لا (ما) صہ سے کم ہو اور اسلئے ا ف (ما + ہ)۔ ف (ما) > صہ ا ب۔ (و) اس سے ظاہر ہے کہ ف (ما) مسلسل ہے اور یہ ما کی ہر ایک قیمت کے لئے مسلسل ہے وقفہ (ا ب) کے درمیان۔

اب ہم ذیل کا مسئلہ ثابت کرتے ہیں، ا ب، ما پر منحصر نہیں۔
مسئلہ ۱۔ اگر فار لا (ما) اور اس کا جزوی مشتق فا، لا (ما) مستقل (۳) کے اندر بے تعلق متغیروں (لا، ما) کے مسلسل تغاقل ہوں تو تغاقل ف (ما) کا مشتق ف (ما) جس کی تعیین (۱) سے

ہوتی ہے ذیل کی مساوات سے حاصل ہوگا

$$ف (ما) = \frac{جف فا (لا، ما)}{جف ما} \text{ ملا} \dots (۴)$$

یہ مسئلہ ”علامت تکمل کے اندر تفرق“ کے نام سے موسوم ہے اور تغیر
ما کو بعض اوقات متبديل کہا جاتا ہے۔

دفعہ ۳ حصہ اول کے مسئلہ اوسط قیمت کی رو سے

فا (لا، ما + ہ) - فا (لا، ما) = ہ فا (لا، ما)

= ہ فا (لا، ما) + ہ فا (لا، ما) - فا (لا، ما) {
جہاں ما کوئی ایک قیمت ہے ما اور ما + ہ کے درمیان۔

(۳) میں مندرج کرنے اور ہ پر تقسیم کرنے سے ہم دیکھتے ہیں

ف (ما + ہ) - ف (ما) = $\frac{جف فا (لا، ما) \text{ ملا} + جف فا (لا، ما) - فا (لا، ما) \text{ ملا}}{ہ}$

(۵) لیکن ہ کو کافی طور پر چھوٹا لینے سے $\frac{جف فا (لا، ما)}{ہ}$ - $\frac{جف فا (لا، ما)}{ہ}$ کو استفادہ
کم کیا جاسکتا ہے جتنا ہم چاہیں خواہ دفعہ (۱) کے اندر لا کی کوئی قیمت
اے (۵) میں آخری تکملہ ہ کے ساتھ صفر کی طرف مستحق ہوتا
ہے اور ہمیں مساوات (۴) حاصل ہوتی ہے۔

اب فرض کر دو کہ ۱ اور ب دونوں ما کے مسلسل تفاعل ہیں مسئلہ (۱)
کے شرائط برقرار ہیں اور $\frac{جف فا (لا، ما)}{ہ}$ ، $\frac{جف فا (لا، ما)}{ہ}$ مسلسل ہیں۔ تو ف (ما)

کا پورا مشتق (دفعہ ۹۰ حصہ اول) کی رو سے ہے

$$\frac{جف فا (لا، ما)}{ہ} = \frac{جف فا (لا، ما)}{ہ} + \frac{جف فا (لا، ما)}{ہ} + \frac{جف فا (لا، ما)}{ہ}$$

$$= \text{فار (لا، ما)} \frac{\text{فر}}{\text{فر ما}} + \text{فار (ب، ما)} \frac{\text{رب}}{\text{فر ما}} + \text{جفف ف} \dots\dots\dots (۶)$$

جہاں جفف ف، جفف ف جفف ب دفعہ ۲۳ (۳) کے موافق معلوم کے

گئے ہیں اور جفف ف جفف ما اوپر کے تکملہ (۴) سے حاصل ہوتا ہے۔

ذیل کا مسئلہ دفعہ ۲۶ میں ثابت کیا گیا ہے لیکن اس دفعہ کے تخیلات سے علاوہ اسے قائم کرنا علم آموز ہوگا۔

مسئلہ ۲۔ اگر فار (لا، ما) متبوع متغیروں لا، ما کا مسلسل تفاعل ہو سقوں (س) میں اور اگر

$$\text{فد (لا، ما)} = \text{کر مر د کر فار ع (و) فرع} \dots\dots\dots (۷)$$

$$\text{تو جفف ف فد} = \text{فار (لا، ما)} = \frac{\text{جفف ف فد}}{\text{جفف ما جفف لا}} \dots\dots\dots (۸)$$

اور ذیل کے تکملے ایک دوسرے کے مساوی ہیں

$$\text{ف} = \text{کر مر ما کر فار (لا، ما) مر لا} = \text{ق} = \text{کر مر لا کر فار (لا، ما) فر ما}$$

$$\dots\dots\dots (۹)$$

دوسرے تکملے ف، ق دراصل مکرر یا متواتر تکملے ہیں جیسا کہ (۸) میں کے مشتق متواتر ہیں۔ دفعہ ۲۶ کے نتائج کو نہیں استعمال کیا جائیگا۔

فرض کرو کہ سار (لا، و) = کر فار ع (و) فرع فد (لا، ما) = کر سار (لا، و) درو تب سار (لا، و) مسلسل ہے اور

$$\frac{\text{جفف ف فد}}{\text{جفف ما}} = \frac{\text{کر سار (لا، و) فرو}}{\text{کر فار ع (ما) فرع}}$$

جف فہ = جف لا جف ما = جف لا
 جف فہ = جف لا جف ما = جف لا
 نیز مسئلہ اکی رو سے

جف فہ = جف لا جف ما = جف لا
 جف فہ = جف لا جف ما = جف لا
 جف فہ = جف لا جف ما = جف لا

جف فہ = جف لا جف ما = جف لا
 جف فہ = جف لا جف ما = جف لا
 جس سے مساوات (۸) قائم ہوتی ہے۔

اسکے بعد ف کے شکل میں فار لا ما کی بجائے جف فہ رکھتے
 جف فہ = جف لا جف ما = جف لا
 جف فہ = جف لا جف ما = جف لا
 جف فہ = جف لا جف ما = جف لا
 جف فہ = جف لا جف ما = جف لا

ق کے شکل میں فار لا ما کی بجائے جف فہ رکھو اور ق کے لئے
 جف فہ = جف لا جف ما = جف لا
 جف فہ = جف لا جف ما = جف لا
 جف فہ = جف لا جف ما = جف لا
 جف فہ = جف لا جف ما = جف لا

جف فہ = جف لا جف ما = جف لا
 جف فہ = جف لا جف ما = جف لا
 جف فہ = جف لا جف ما = جف لا
 جف فہ = جف لا جف ما = جف لا

of Math (2nd Series) (Vol 3 pp 129-146)

طالب علم ذیل کی بحث کو دفعات ۴۲، ۴۶ کے ساتھ مقابلہ کرے۔ مختلف مسئلوں کے قیام کے لئے جو شرائط بیان کئے گئے ہیں وہ محض کافی ہیں ضروری نہیں۔

نوٹ۔ جب تک کہ اسکے خلاف بالتصریح نہ بیان کیا جائے شکل جو بالعموم فار (لا، ما) سے تعبیر ہوگا دو بے تعلق متغیروں (لا، ما) کا ان کی تمام زیر بحث قیمتوں کے لئے مسلسل تفاعل خیال کیا جائیگا۔ وقفہ یا ست (ا، ب) سے بالعموم بند وقفہ مراد ہوگا دفعہ ۴۵ حصہ اول اگر اس کے خلاف بالتصریح نہ بیان کیا جائے۔ علامت صہ سے اختیاری چھوٹی مثبت مقدار تعبیر ہوگی۔ اگر ان تشرادادوں کو ملحوظ رکھا جائے تو بہت سے تکرار سے باہم بچ جائینگے۔

تعریف۔ تکملہ \int فار (لا، ما) مر (لا) (ا)

تمام وسعت $\int \geq$ ما \int جب میں یکساں طور پر مستحق کہلا آئے اگر صہ کے لئے جانے کی صورت میں ایک ایسا عدد معلوم کر لینا ممکن ہو جو ما پر منحصر نہ ہو اور جس کی ہر ایسی قیمت کے لئے جو صہ سے بڑی ہو

\int فار (لا، ما) مر (لا) > صہ (ب)

ذیل کے اشارے مفید ہونگے۔ اگر تکملہ (ا) محض مستحق ہو تو ہر اس طور پر مقرر ہو سکتا ہے کہ لا تساوی (ب) پوری ہو جبکہ $\int <$ مر لیکن عام طور پر ہر صرف صہ پر ہی منحصر نہیں ہوگا بلکہ ما پر بھی۔ اگر ہر صرف صہ کا تفاعل ہو جبکہ $\int \geq$ ما \int تو تکملہ (ا) وقفہ (ا، ب) میں یکساں طور پر مستحق ہوگا۔

ایسا ہو سکتا ہے کہ صرف صہ کا تفاعل ہو مآ کی ہر ایسی قیمت کے لئے جو \leq و ایسی صورت میں تکملہ (لا) بلا مد وقفہ مآ \leq و میں یکساں طور پر مستحق ہوگا۔ لیکن یہ بھی ممکن ہے کہ ہر صرف صہ کا تفاعل ہو خواہ کوئی معین قیمت (جو کتنی بڑی ہو سکتی ہے) ب کو دی جائے اور ساتھ ہی ہر قیمت مآ \leq و کے لئے یہ صرف صہ کا تفاعل نہ ہو، اس صورت میں ب کے ساتھ لاتنا ہی کی طرف جاسکتا ہے، استدقاق اس لئے لاتنا مست یا بطنی ہوگا (مقابلہ کرو دفعہ ۹ کے ساتھ) ایسی حالت میں اسے یوں بیان کرتے ہیں کہ تکملہ (لا) یکساں طور پر مستحق ہے اختیاری وقفہ (لا ب) میں۔

تکملہ ∞ تو ∞ لا یکساں طور پر مستحق ہے بے حدود وقفہ مآ \leq و۔

میں لیکن تکملہ ∞ تو ∞ لا یکساں طور پر مستحق ہے صرف ایک اختیاری وقفہ۔ $\infty \geq$ مآ \geq ب میں جہاں ب کوئی معین عدد ہے خواہ یہ کتنا ہی بڑا ہو۔

مسئلہ۔ تکملہ (لا) تمام وقفہ (لا ب) کے اندر یکساں طور پر مستحق ہوگا اگر ایک ایسے تفاعل فہ (لا) کا وجود ہو جو مآ پر منحصر نہ ہو اور ایسا ہو کہ $\infty \geq$ مآ \geq ب کے لئے

(ع) فہ (لا) \leq جبکہ لا \leq و

(ب) افار (لا مآ) \geq فہ (لا) جبکہ لا \leq و

(ج) تکملہ ∞ فہ (لا) فرلا مستحق ہو۔

ثبوت آسان ہے۔

ا ∞ فہ (لا مآ) فرلا \geq مآ افار (لا مآ) فرلا \geq مآ فہ (لا) فرلا

اور بشرط (جما) کی رو سے ہم کو اس طور پر منتخب کر سکتے ہیں (جو ما پر منحصر نہیں) کہ اگر ∞ ہو تو مؤخر الذکر تکملہ صنف سے کم ہو۔
یہ مسئلہ دفعہ ۲۲ کے مسئلہ ۳ کا جواب ہے۔ وقفہ (ا، ب) محدود یا نامحدود ہو سکتا ہے۔

نتیجہ صریح ۱۔ اگر تمام وقفہ (ا، ب) میں
فار (لا، ما) = ف (لا، سا) (لا، ما)

جہاں سا (لا، ما) محدود ہے اور ف (لا، سا) مطلق طور پر مستند تو تکملہ (ا) یکساں طور پر مستند ہوگا تمام وقفہ (ا، ب) میں۔
اگر اس (لا، ما) ∞ (مستقل) تو رکھو
ف (لا، سا) = ف (لا، سا) (لا، ما)

اور مسئلہ لگ سکتا ہے۔
نتیجہ صریح ۲۔ لکھو فار (لا، ما) = لا \times لا فار (لا، ما)۔ اگر لا فار (لا، ما) لا، ما کی تمام زیر بحث قیمتوں کے لئے محدود ہو تو تکملہ (ا) یکساں طور پر مستند ہوگا بشرطیکہ ∞ (دفعہ ۶۴)

مثال۔ جما (ما) = ف (لا، ما)۔ تمام اختیاری وقفہ (ا، ب) میں
یکساں طور پر مستند ہوتا ہے کیونکہ لا ∞ = لا ∞ (لا، ما) اور لا ∞ = لا ∞

محدود ہے۔
اگر ∞ ∞ تو شکل خلی حد پر غیر مسلسل ہے لیکن تکملہ بالخصوص کے عمل سے ہم دیکھتے ہیں کہ

$$\text{جما (ما)} = \frac{1}{\infty} \text{ ف (لا، ما)}$$

اور تیکم تکم تمام سمت $\langle \text{ر} \geq \text{ما} \geq \text{ب} \rangle$ کے اندر یکساں طور پر مستحق ہے۔
نوٹ: ترقیم کا یا تفاعل کے لئے جہاں (ما) = (ج) (۸)
۱۔ تسلسل اور حدود۔ اب ہم چند مسائل پر بحث کریں گے جو اساسی اہمیت رکھتے ہیں۔

مسئلہ ۱۔ اگر تکملہ

ف (ما) = $\langle \text{ر} \text{ فار لا کا} \rangle$ ملا

یکساں طور پر مستحق ہو تمام سمت $\langle \text{ر} \geq \text{ما} \geq \text{ب} \rangle$ میں تو اس تمام سمت میں یہ ما کا تسلسل تفاعل ہو گا۔
ثبوت مسئلہ ۱ دفعہ ۲۲ کے ثبوت کے متشابہ ہے اور طالب علم کے لئے چھوڑا جاتا ہے۔

مسئلہ ۲۔ اگر سا (لا) مسلسل ہو جبکہ لا $\leq \text{و}$ اور تکملہ

کت = $\langle \text{ر} \text{ سا (لا)} \rangle$ ملا

مستحق ہو تو ذیل کا تکملہ جبکہ ما \leq ۔

ف (ما) = $\langle \text{ر} \text{ قو} \text{ سا (لا)} \rangle$ ملا

مستحق ہو گا اور نہ یا ف (ما) = کت

چونکہ قو ما گھٹنے والا تفاعل ہے اس لئے جب کب مثبت ہو اور

$\text{ر} > \text{ب} \geq \text{ضما} \geq \text{ج}$

ج۔ قو۔ سا (لا) ملا = قو۔ اب $\langle \text{ر} \text{ سا (لا)} \rangle$ ملا + قو۔ ماج $\langle \text{ر} \text{ سا (لا)} \rangle$ ملا ... (۱)
ب

اجزائے ضربی قو⁻ ماب⁻ قو⁻ ماب⁻ محدود ہیں اور چونکہ تکمیلت مستدق ہے اسلئے (۱) کے بائیں جانب کے دونوں تکملے صفر کی طرف مائل ہوتے ہیں جیسے ب اور ج لا تنہا ہی کی طرف مائل ہوں۔ تکملہ ف (فا) اسلئے مستدق ہے (جیسا کہ اوپر طرح بھی ظاہر ہے)۔
اب فرض کرو کہ ج مائل بہ لا تنہا ہی ہوتا ہے اور ب محدود رہتا ہے۔
چونکہ قو⁻ ماب⁻ صفر کی طرف مائل ہوتا ہے اسلئے (۱) سے ہم دیکھتے ہیں

$$قو^{\infty} ماب^{\infty} سار (لا) ماب^{\infty} = قو^{\infty} ماب^{\infty} سار (لا) ماب^{\infty} ضا^{\infty} \leq ب$$

(۱) میں ضا کی قیمت بالعموم ج کے ساتھ بیکگی اور اس لئے

$$ف (ما) = قو^{\infty} ماب^{\infty} سار (لا) ماب^{\infty} + قو^{\infty} ماب^{\infty} سار (لا) ماب^{\infty} ... (۲)$$

$$اب لوحت = قو^{\infty} ماب^{\infty} سار (لا) ماب^{\infty} + قو^{\infty} ماب^{\infty} سار (لا) ماب^{\infty} ... (۳)$$

$$پس ف (ما) - ح = قو^{\infty} ماب^{\infty} سار (لا) ماب^{\infty} + قو^{\infty} ماب^{\infty} سار (لا) ماب^{\infty}$$

$$- قو^{\infty} ماب^{\infty} سار (لا) ماب^{\infty} ... (۴)$$

اب چونکہ ح مستدق ہے اور قو⁻ ماب⁻ محدود ہے اس لئے ہم ب کو اتنا بڑا منتخب کر سکتے ہیں کہ (۴) کے بائیں جانب کی دوسری اور تیسری رئیس تعداد اتنی چھوٹی ہوں جتنا ہم چاہیں۔ ب کے لئے ایسا انتخاب کر

ب کی ایسی قیمت منتخب کرو اور پھر اسے ثابت رکھو۔ شرط (۲) کی رو سے ہم صا کی قیمت اس طرح منتخب کر سکتے ہیں کہ وقفہ (ا، ب) میں لا کی خواہ کچھ ہی قیمت ہو فرق |ف (لا، ما)۔ ف (لا، ما) | کم ہو $\frac{ص}{۳}$ (ب۔ د) سے بشرطیکہ ہر دو ما، کا بڑے ہوں صا سے محض یہ اس امر کے لئے شرط ہے کہ ف (لا، ما) یکساں طور پر ایک معین انتہا کی طرف مائل ہو جبکہ ما لاتنا ہی کی طرف مائل ہو۔ اگر صا کا اس طور پر انتخاب کیا جائے تو |ما| کم ہوگا $\frac{ص}{۳}$ سے۔ پس اگر ما، کا بڑے ہوں صا سے تو فرق |سا (ما)۔ سا (ما)| کم ہوگا صہ سے۔ دوسرے الفاظ میں جب ما لاتنا ہی کی طرف مائل ہوتا ہے تو سا (ما) ایک معین انتہا کی طرف مائل ہوتا ہے، اس انتہا کو ب سے تعبیر کرو۔ اب ہم ثابت کر چکے کہ

ب = ف (لا، فرلا)

ہم کہتے ہیں (ب فی الحال غیر معین ہے)

ف (لا، درلا)۔ ب = ف (لا، فرلا)۔ ف (لا، ما) { درلا

+ [ف (لا، ما) درلا]۔ ف (لا، ما) درلا + [ف (لا، ما) درلا]

= صا + با + جا (مانو)
چونکہ سا (ما) کی انتہا ب ہے ہم صا کو اس طور پر منتخب کر سکتے ہیں کہ اگر ما، صا تو ا جا، ا $\frac{ص}{۳}$ ۔ شرط (۱) کی رو سے ہم ب کو اس طور پر منتخب کر سکتے ہیں کہ اگر ب، ب کو ا با، ا $\frac{ص}{۳}$ خواہ ما کی کچھ ہی قیمت ہو۔ اس شرط کے ماتحت ب کی قیمت منتخب کر کے شرط (۲) کی رو سے

ہم ما کو اس طور پر منتخب کر سکتے ہیں کہ اگر ما < ما تو اعدا > صہ، پس اگر ما بڑا ہو ما اور صہ سے اور ب کوئی عدد ہو بڑا ب سے تو

ا۔ ف (لا) فر لا۔ چا > صہ (۶)

چونکہ اس لائساوی میں ما شامل نہیں ہوتا ہم آسان عبارت میں اسے یوں بیان کر سکتے ہیں کہ خواہ صہ کقدر چھوٹا ہو ب معلوم ہو سکتا ہے کہ اگر ب < ب تو لائساوی (۶) پوری ہوتی ہے۔ دوسرے الفاظ میں یہ ب لائساوی کی طرف مائل ہوتا ہے مکملہ ف (لا) فر لا مائل بہ چا ہوتا ہے۔ مسئلہ اس طرح ثابت ہوتا ہے۔

۷۲۔ علامت تکمیل کے اندر اعمال۔ اب ہم دفعہ ۶۹ کے مسئلوں کو وسعت دینگے، طالب علم کو نوٹ دفعہ ۷۰ کی طرف توجہ دلائی جاتی ہے۔
مسئلہ ۱۔ اگر تکملہ

ف (ما) = ف (لا، ما) فر لا (۱)

یکساں طور پر مستحق ہو پوری سعت و \geq ما \geq ب میں تو

ف (ما) فر لا = ف (ما) فر لا = ف (لا، ما) فر لا = ف (لا، ما) فر لا (۲)

جہاں ما کوئی معین عدد ہے وقفہ (ب، ب) میں۔

جب تکمیل کے حدود محدود مستقل ہوں تو مکمل کی ترتیب کوئی بھی ہو سکتی ہے اسلئے

کُورِ لا کُورِ فارِ لا کُورِ = کُورِ فارِ لا کُورِ = کُورِ فارِ لا کُورِ
 - کُورِ فارِ لا کُورِ

فرض کرو کہ ب مائل بہ لاتنا ہی ہوتا ہے، ثب

کُورِ لا کُورِ فارِ لا کُورِ = کُورِ فارِ لا کُورِ = کُورِ فارِ لا کُورِ
 لیکن چونکہ تکملہ (۱) یکساں طور پر مستحق ہوتا ہے پورے وقفہ (رَبِّ)
 میں اس لئے ہم ہر منتخب کر سکتے ہیں (جو ماضی پر منحصر نہ ہو) اور جبکہ ب مائل
 کُورِ فارِ لا کُورِ = حصہ اور کُورِ فارِ لا کُورِ = حصہ اور
 اسلئے جیسے ب مائل بہ لاتنا ہی ہوتا ہے موخر الذکر تکملہ مائل صفر ہوتا ہے

سئلہ اس طرح ثابت ہوتا ہے۔
 یہ قابل توجہ ہے کہ علامت تکمیل کے اندر تکمیل کرنے سے جو نیا تکملہ
 ماضی ہوتا ہے وہ خود سمیت ر مائل ماضی کے اندر یکساں طور پر
 مستحق ہے۔

اس سئلہ کی توسیع سئلہ (۲) دفعہ ۳ میں کی گئی ہے۔

سئلہ ۲۔ اگر تحکمہ کُورِ جف فارِ لا کُورِ = کُورِ جف فارِ لا کُورِ
 ہو تمام سمیت ر مائل ماضی میں تو یہ تکملہ (۱) کا مشتق ہوگا۔
 کیونکہ اگر فن (ما) = کُورِ جف فارِ لا کُورِ = کُورِ جف فارِ لا کُورِ
 نوسئلہ (۱) کی رو سے

ف (ما) درما = ف (ما) جف فارلا (ما) درما = ف (ما) درلا - ف (ما) درلا (ما) درلا
یعنی ف (ما) درما = ف (ما) - ف (ما)

بمطابق ما کے تفرق کرنے سے ف (ما) = ف (ما) -
اب ہم ان مسائل کو بعض مشہور تکملوں کی قیمتیں معلوم کرنے میں لگائیں گے
جب اس امر کا ثبوت نہ درج کیا جائے کہ تکملہ یکساں طور پر مستحق ہے
تو طالب علم اسے باسانی خود بہم پہنچا سکیگا۔ اوسط قیمت کے مسئلے اور
تکملہ بالخصوص کا عمل یکساں استیفاء کے جائزہ میں اکثر مفید ہوگا
متغیر کی تبدیلی بھی بعض اوقات کارآمد ہوگی۔
(نیز ملاحظہ ہو دفعہ ۴ کے شروع کی عبارت)

مثال ۱۔ فرض کرو کہ $s = \frac{f}{l}$ - ف (ما) درلا جب ما لا درلا -
بمطابق ما کے تفرق کرو اس لئے

$\frac{f}{l} = \frac{f}{l} - \frac{f}{l} = \frac{f}{l}$ - ف (ما) درلا جب ما لا درلا
اس مساوات کو بمطابق ما کے تکمل کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ

ع = سن (ما) (۱)
کیونکہ ع =۔ جبکہ ما =۔
جب ما =۔ تو تکملہ مستحق ہوتا ہے، اس لئے مسئلہ (۲) دفعہ ۱
کی رو سے

$\frac{f}{l} = \frac{f}{l} - \frac{f}{l} = \frac{f}{l}$ - ف (ما) درلا جب ما لا درلا
مثبت علامت لینی چاہئے اگر ما <۔ اور - اگر ما >۔ اگر ما =۔ تو تکملہ صفر ہوگا۔

مثال ۲۔ $\infty \frac{\text{قولا} - \text{قوبلا}}{\text{لا}} = \text{فرلا} = \text{لوک} \frac{\text{ب}}{\text{ر}} \text{ب} < \text{ر} < .$
 ذیل کے تکملہ پر غور کرو جبکہ $\text{ما} \leq \text{ج} < .$
 $\infty \frac{\text{قولا} - \text{قوبلا}}{\text{لا}} = \text{فرلا} = \frac{1}{\text{ما}}$

اگر $\text{ر} \leq \text{ج}$ جہاں ج ایک ثابت مثبت عدد ہے تو ہم بلحاظ ما کے بحال کر سکتے ہیں $\text{ما} = \text{ر}$ سے $\text{ما} = \text{ب} < \text{ر}$ تک اس لئے

$$\infty \frac{\text{قولا} - \text{قوبلا}}{\text{لا}} = \text{فرلا} = \text{لوک} \frac{\text{ب}}{\text{ر}}$$

مثال ۳۔ $\infty \frac{\text{جملا} - \text{جمبلا}}{\text{لا}} = \text{فرلا} = \text{لوک} \left(\frac{\text{ب}}{\text{ر}} \right) \text{ب} < . \text{ر} < .$

اگر $\text{لا} < .$ تو $\infty \frac{\text{قولا} - \text{قوبلا}}{\text{لا}} = \text{فرلا} = \frac{\text{ما}}{\text{لا} + \text{ما}}$

بلحاظ ما کے بحال کرو $\text{ما} = \text{ر}$ سے $\text{ما} = \text{ب}$ تک اس طرح

$$\infty \frac{\text{جملا} - \text{جمبلا}}{\text{لا}} = \text{فرلا} = \frac{1}{\text{لوک}} \left(\frac{\text{لا} + \text{ب}}{\text{لا} + \text{ر}} \right)$$

یہ آسانی سے ثابت ہو سکتا ہے کہ یہ تکملہ مستحق ہے جبکہ $\text{لا} = .$ ، لا کو صفر کے مساوی رکھنے سے مطلوبہ قیمت حاصل ہوتی ہے۔

تکملہ کی قیمت کیا ہوگی اگر ر یا ب یا ر اور ب دونوں منفی ہوں؟

مثال ۴۔ $\infty \frac{\text{جملا} - \text{جمبلا}}{\text{لا}} = \text{و} = \infty \frac{\text{لا} + \text{ب}}{\text{لا} + \text{ر}}$

$\frac{\text{ر}}{\text{و}} = - = \infty \frac{\text{لا} + \text{ب}}{\text{لا} + \text{ر}} = - . \text{و} (۱)$

بشرطیکہ تکملہ و یکساں طور پر مستحق ہو اور ایسا ہوگا اگر $\text{ر} \leq \text{ج} < .$

مثال ۶۔ $\int_0^{\infty} (x^2 + \frac{1}{x^2}) dx = \frac{\pi}{2}$ اور $\int_0^{\infty} x^2 dx = \frac{\pi}{2}$ اور $\int_0^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \frac{\pi}{2}$ ۔

اس تکملہ کی قیمت بلحاظ x کے تفریق کرنے سے حاصل ہو سکتی ہے لیکن متغیر کے بدلنے کا قاعدہ زیادہ علم آموز ہوگا، رکھو

$$u = x^2 + \frac{1}{x^2}, \quad \frac{du}{dx} = 2x - \frac{2}{x^3} = 2(x^4 - 1)/x^3$$

$$\frac{dx}{du} = \frac{x^3}{2(x^4 - 1)} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{x^4 - 1} \right\} \quad (1)$$

متغیر u اقل ہے جبکہ $u = 1$ ۔ جیسے u بڑھتا ہے صفر سے

$\frac{1}{u}$ تک u گھٹتا ہے ∞ سے $u = 1$ اور $\frac{1}{u}$ تک u لاکھڑی اس سمت

کے لئے (۱) اور (۲) میں منفی علامت لینی چاہئے۔ جیسے u بڑھتا

ہے $\frac{1}{u}$ سے ∞ تک u بڑھتا ہے $u = 1$ اور $\frac{1}{u}$ سے ∞ تک

لاکھڑی اس سمت کے لئے (۱) اور (۲) میں مثبت علامت لینی چاہئے۔

نیز $\frac{1}{u} + \frac{1}{u^3} = \frac{1}{u} - \frac{1}{u^3} = \frac{1}{u^3}$ اور $\frac{1}{u} - \frac{1}{u^3} = \frac{1}{u^3}$ پس تکملہ مساوی ہے

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \int_1^{\infty} \frac{1}{u} \frac{dx}{du} du + \int_{\infty}^1 \frac{1}{u} \frac{dx}{du} du = \int_1^{\infty} \frac{1}{u} \frac{dx}{du} du$$

$$= \int_1^{\infty} \frac{1}{u} \frac{dx}{du} du = \int_1^{\infty} \frac{1}{u} \frac{dx}{du} du = \int_1^{\infty} \frac{1}{u} \frac{dx}{du} du$$

ابال $u = 1$ اور $\frac{1}{u} = \infty$ سے۔ ملاحظہ کرنا کہ تکملہ کی مطلوبہ قیمت

فورا حاصل ہوتی ہے۔ طالب علم ابدال و = لا۔ ب کی مدد سے
تیمت محسوب کرے۔ جیسے لا بڑھتا ہے صفر سے تک و بڑھتا
ہے۔ سے تک۔

مثال۔ ۱۔ ۱ = ۱۔ ۱ = ۱۔ ۱ = ۱۔ ۱ = ۱۔ ۱ = ۱۔ ۱ = ۱۔
جہاں ۱۔ ۱۔ ۱۔ ۱۔ ۱۔ ۱۔ ۱۔ ۱۔ ۱۔ ۱۔
ذیل کے ابدال عمل میں لاؤ۔

۱۔ ۱ = ۱۔ ۱ = ۱۔ ۱ = ۱۔ ۱ = ۱۔ ۱ = ۱۔ ۱ = ۱۔
۱۔ ۱ = ۱۔ ۱ = ۱۔ ۱ = ۱۔ ۱ = ۱۔ ۱ = ۱۔ ۱ = ۱۔

اس طرح تکملے یہ شکل اختیار کرتے ہیں

۱۔ ۱ = ۱۔ ۱ = ۱۔ ۱ = ۱۔ ۱ = ۱۔ ۱ = ۱۔ ۱ = ۱۔

۱۔ ۱ = ۱۔ ۱ = ۱۔ ۱ = ۱۔ ۱ = ۱۔ ۱ = ۱۔ ۱ = ۱۔

اب دیکھو لفظ طہ کے تفریق کرنے سے حاصل ہوتا ہے

۱۔ ۱ = ۱۔ ۱ = ۱۔ ۱ = ۱۔ ۱ = ۱۔ ۱ = ۱۔ ۱ = ۱۔

۱۔ ۱ = ۱۔ ۱ = ۱۔ ۱ = ۱۔ ۱ = ۱۔ ۱ = ۱۔ ۱ = ۱۔

شرطیکہ تکملے یکساں طور پر مستحق ہوں اور یہ ہیں کیونکہ اگر ج مثبت ہو
خواہ یہ کتنا ہی چھوٹا کیوں نہ ہو تو ا کے جم طہ کے ج اور ان میں سے
ایک تکملہ تقدیر ادا کم ہے ذیل کے تکملہ سے

$$\frac{\text{ج} \text{ ما} \text{ ن} \text{ مر} = \text{جا} \text{ ر} \text{ ن} + ۱}{\text{ج} + ۱}$$

پس ہر ایک تکملہ یکساں طور پر مستحق ہے جبکہ - $\frac{\text{ج} + ۱}{\text{ج} + ۱} > \frac{\text{ج} + ۱}{\text{ج} + ۱}$
 ہم مساوات (۱) کو اس شکل میں لکھ سکتے ہیں
 $\frac{\text{ج} + ۱}{\text{ج} + ۱} = \frac{\text{ج} + ۱}{\text{ج} + ۱} \text{ ما} \text{ ن} \text{ مر} \{ \text{ج} + ۱ \} \text{ جب} \{ \text{ما} \text{ جب} \text{ ط} \} \{ \text{مر} \}$
 اور تکمیل بالخص سے

$$\frac{\text{ج} + ۱}{\text{ج} + ۱} = \text{ن} \{ \text{ج} + ۱ \} \text{ ما} \text{ ن} \text{ مر} \{ \text{ج} + ۱ \} \text{ جب} \{ \text{ما} \text{ جب} \text{ ط} \} \{ \text{مر} \} = \text{ن} \{ \text{ج} + ۱ \} \text{ مر} \{ \text{ج} + ۱ \}$$

$$\text{اسی طرح سے } \frac{\text{ج} + ۱}{\text{ج} + ۱} = \text{ن} \{ \text{ج} + ۱ \} \text{ مر} \{ \text{ج} + ۱ \} \dots \dots \dots (۴)$$

$$(۳) \text{ اور } (۴) \text{ سے } \frac{\text{ج} + ۱}{\text{ج} + ۱} + \text{ن} \{ \text{ج} + ۱ \} \text{ مر} \{ \text{ج} + ۱ \} = \text{ج} + ۱ \text{ جب} \text{ ن} \text{ ط} \text{ مر}$$

$$\text{جب} \{ \text{ط} \} = \text{ن} \{ \text{ج} + ۱ \} \text{ مر} \{ \text{ج} + ۱ \} \text{ ما} \text{ ن} \text{ مر} \{ \text{ج} + ۱ \} \text{ جب} \{ \text{ما} \text{ ر} \text{ ن} \} \{ \text{ج} + ۱ \} \text{ مر} \{ \text{ج} + ۱ \} = \text{ج} + ۱ \text{ مر} \{ \text{ج} + ۱ \}$$

$$\text{پس } \{ \text{ج} + ۱ \} \text{ مر} \{ \text{ج} + ۱ \} \text{ جب} \{ \text{ما} \text{ ر} \text{ ن} \} \{ \text{ج} + ۱ \} \text{ مر} \{ \text{ج} + ۱ \} = \text{ج} + ۱ \text{ مر} \{ \text{ج} + ۱ \}$$

$$\text{اور اس لئے } \{ \text{ج} + ۱ \} \text{ مر} \{ \text{ج} + ۱ \} \text{ جب} \{ \text{ما} \text{ ر} \text{ ن} \} \{ \text{ج} + ۱ \} \text{ مر} \{ \text{ج} + ۱ \} = \text{ج} + ۱ \text{ مر} \{ \text{ج} + ۱ \} \text{ جب} \{ \text{ما} \text{ ر} \text{ ن} \} \{ \text{ج} + ۱ \} \text{ مر} \{ \text{ج} + ۱ \}$$

$$(۵) \dots \dots \dots$$

اس لئے ہمیں ذیل کے نتائج حاصل ہوتے ہیں

$$\frac{\text{ج} + ۱}{\text{ج} + ۱} \text{ لا} \text{ لا} \text{ لا} \text{ جب} \{ \text{ما} \text{ ر} \text{ ن} \} \{ \text{ج} + ۱ \} \text{ مر} \{ \text{ج} + ۱ \} = \text{ج} + ۱ \text{ مر} \{ \text{ج} + ۱ \} \text{ جب} \{ \text{ما} \text{ ر} \text{ ن} \} \{ \text{ج} + ۱ \} \text{ مر} \{ \text{ج} + ۱ \} \dots \dots \dots (۶)$$

۷۳۔ لائسنس دہانہ کے لئے مکمل کی ترتیب مسئلہ ۷۲ سے

سے ظاہر ہے کہ بعض حالات کے ماتحت مکمل کی ترتیب اس صورت میں بھی بدل سکتی ہے جبکہ ایک حد لائننا ہی ہو۔ دفعہ ۱ کے مسئلہ ۳ سے ان شرائط کی تعیین ہوتی ہے جن کے ماتحت دفعہ ۲ کے مسئلہ کو توسیع دیکر ہم اس صورت پر بھی حاوی کر سکتے ہیں جس میں اوپر کی حد مابھی لائننا ہی ہو مسئلہ ۱۔ اگر تکملے

ف (لا، ما) و لا (۱) ف (لا، ما) و لا (۲)
بالترتیب یکساں طور پر مستحق ہوں بالتمام اختیار ہی وقفوں (و کب) اور (و کب) میں

اور اگر تکملہ ف (لا، ما) و لا ف (لا، ما) و لا (۳)
یکساں طور پر مستحق ہو پورے نامحدود وقفہ مابھی و نہیں تو

ف (لا، ما) و لا = ف (لا، ما) و لا ف (لا، ما) و لا (۴)
فرض کرو کہ دفعہ ۱ کے مسئلہ ۳ کے تفاعل ف (لا، ما) کی تعیین ذیل کی مساوات سے ہوتی ہے

$$ف (لا، ما) = ف (لا، ما) و لا$$

اس صورت میں اوپر کا تکملہ (۳) مسئلہ مذکورہ کا تفاعل سا (ما) ہوگا۔
اوپر کے تکملہ (۲) کا استدقاق مسئلہ مذکورہ کی شرط (۲) کو پورا کرتا ہے اور
تکملہ (۳) کا استدقاق شرط (۱) کو اور اوپر کے تکملہ (۱) کے استدقاق کی
وجہ سے ہم دفعہ ۲ کے مسئلہ کو لگا سکتے ہیں۔ اس طرح حاصل ہوتا ہے
ف (لا، ما) و لا = ف (لا، ما) و لا ف (لا، ما) و لا

$\infty \leftarrow \frac{1}{\infty}$ فرلا فرلا فا (لا'ما) فرما (مسئله دفعه ۲)

= كَرَّوْلا كَرِّفَا (لا، ما) وِما (مسئله ۳، دفعه ۱)

طالب علم شاید یہ خیال کرے گا کہ سو خزانہ ذکر تکملہ اس سے پہلے تکملہ کو لکھنے کا صوف
ایک اور طریقہ تھا لیکن یہ ایسا نہیں ہے۔ آخر سے دوسرے تکملہ میں اعمال کی
ترتیب یہ ہے (۱) تکملہ لمجاظ ما کے (۲) تکملہ لمجاظ لا کے اور انتہا لا کے
کی طرف گذر (۳) انتہا ما کے کی طرف گذر۔ آخری تکملہ میں ترتیب
یہ ہے (۱) تکملہ لمجاظ ما کے (۲) انتہا ما کے کی طرف گذر (۳) تکملہ لمجاظ
لا کے اور انتہا لا کے کی طرف گذر۔ ترتیب الٹانے کے لئے
اس کا جو اثر ثابت کرنے کی ضرورت ہوگی جیسے ذیل کی سادہ مثال سے
ظاہر ہے۔ اگر ۱۔ ۷۔ ۸۔ ۹۔ ۱۰۔ ۱۱۔ ۱۲۔ ۱۳۔ ۱۴۔ ۱۵۔ ۱۶۔ ۱۷۔ ۱۸۔ ۱۹۔ ۲۰۔ ۲۱۔ ۲۲۔ ۲۳۔ ۲۴۔ ۲۵۔ ۲۶۔ ۲۷۔ ۲۸۔ ۲۹۔ ۳۰۔ ۳۱۔ ۳۲۔ ۳۳۔ ۳۴۔ ۳۵۔ ۳۶۔ ۳۷۔ ۳۸۔ ۳۹۔ ۴۰۔ ۴۱۔ ۴۲۔ ۴۳۔ ۴۴۔ ۴۵۔ ۴۶۔ ۴۷۔ ۴۸۔ ۴۹۔ ۵۰۔ ۵۱۔ ۵۲۔ ۵۳۔ ۵۴۔ ۵۵۔ ۵۶۔ ۵۷۔ ۵۸۔ ۵۹۔ ۶۰۔ ۶۱۔ ۶۲۔ ۶۳۔ ۶۴۔ ۶۵۔ ۶۶۔ ۶۷۔ ۶۸۔ ۶۹۔ ۷۰۔ ۷۱۔ ۷۲۔ ۷۳۔ ۷۴۔ ۷۵۔ ۷۶۔ ۷۷۔ ۷۸۔ ۷۹۔ ۸۰۔ ۸۱۔ ۸۲۔ ۸۳۔ ۸۴۔ ۸۵۔ ۸۶۔ ۸۷۔ ۸۸۔ ۸۹۔ ۹۰۔ ۹۱۔ ۹۲۔ ۹۳۔ ۹۴۔ ۹۵۔ ۹۶۔ ۹۷۔ ۹۸۔ ۹۹۔ ۱۰۰۔ ۱۰۱۔ ۱۰۲۔ ۱۰۳۔ ۱۰۴۔ ۱۰۵۔ ۱۰۶۔ ۱۰۷۔ ۱۰۸۔ ۱۰۹۔ ۱۱۰۔ ۱۱۱۔ ۱۱۲۔ ۱۱۳۔ ۱۱۴۔ ۱۱۵۔ ۱۱۶۔ ۱۱۷۔ ۱۱۸۔ ۱۱۹۔ ۱۲۰۔ ۱۲۱۔ ۱۲۲۔ ۱۲۳۔ ۱۲۴۔ ۱۲۵۔ ۱۲۶۔ ۱۲۷۔ ۱۲۸۔ ۱۲۹۔ ۱۳۰۔ ۱۳۱۔ ۱۳۲۔ ۱۳۳۔ ۱۳۴۔ ۱۳۵۔ ۱۳۶۔ ۱۳۷۔ ۱۳۸۔ ۱۳۹۔ ۱۴۰۔ ۱۴۱۔ ۱۴۲۔ ۱۴۳۔ ۱۴۴۔ ۱۴۵۔ ۱۴۶۔ ۱۴۷۔ ۱۴۸۔ ۱۴۹۔ ۱۵۰۔ ۱۵۱۔ ۱۵۲۔ ۱۵۳۔ ۱۵۴۔ ۱۵۵۔ ۱۵۶۔ ۱۵۷۔ ۱۵۸۔ ۱۵۹۔ ۱۶۰۔ ۱۶۱۔ ۱۶۲۔ ۱۶۳۔ ۱۶۴۔ ۱۶۵۔ ۱۶۶۔ ۱۶۷۔ ۱۶۸۔ ۱۶۹۔ ۱۷۰۔ ۱۷۱۔ ۱۷۲۔ ۱۷۳۔ ۱۷۴۔ ۱۷۵۔ ۱۷۶۔ ۱۷۷۔ ۱۷۸۔ ۱۷۹۔ ۱۸۰۔ ۱۸۱۔ ۱۸۲۔ ۱۸۳۔ ۱۸۴۔ ۱۸۵۔ ۱۸۶۔ ۱۸۷۔ ۱۸۸۔ ۱۸۹۔ ۱۹۰۔ ۱۹۱۔ ۱۹۲۔ ۱۹۳۔ ۱۹۴۔ ۱۹۵۔ ۱۹۶۔ ۱۹۷۔ ۱۹۸۔ ۱۹۹۔ ۲۰۰۔ ۲۰۱۔ ۲۰۲۔ ۲۰۳۔ ۲۰۴۔ ۲۰۵۔ ۲۰۶۔ ۲۰۷۔ ۲۰۸۔ ۲۰۹۔ ۲۱۰۔ ۲۱۱۔ ۲۱۲۔ ۲۱۳۔ ۲۱۴۔ ۲۱۵۔ ۲۱۶۔ ۲۱۷۔ ۲۱۸۔ ۲۱۹۔ ۲۲۰۔ ۲۲۱۔ ۲۲۲۔ ۲۲۳۔ ۲۲۴۔ ۲۲۵۔ ۲۲۶۔ ۲۲۷۔ ۲۲۸۔ ۲۲۹۔ ۲۳۰۔ ۲۳۱۔ ۲۳۲۔ ۲۳۳۔ ۲۳۴۔ ۲۳۵۔ ۲۳۶۔ ۲۳۷۔ ۲۳۸۔ ۲۳۹۔ ۲۴۰۔ ۲۴۱۔ ۲۴۲۔ ۲۴۳۔ ۲۴۴۔ ۲۴۵۔ ۲۴۶۔ ۲۴۷۔ ۲۴۸۔ ۲۴۹۔ ۲۵۰۔ ۲۵۱۔ ۲۵۲۔ ۲۵۳۔ ۲۵۴۔ ۲۵۵۔ ۲۵۶۔ ۲۵۷۔ ۲۵۸۔ ۲۵۹۔ ۲۶۰۔ ۲۶۱۔ ۲۶۲۔ ۲۶۳۔ ۲۶۴۔ ۲۶۵۔ ۲۶۶۔ ۲۶۷۔ ۲۶۸۔ ۲۶۹۔ ۲۷۰۔ ۲۷۱۔ ۲۷۲۔ ۲۷۳۔ ۲۷۴۔ ۲۷۵۔ ۲۷۶۔ ۲۷۷۔ ۲۷۸۔ ۲۷۹۔ ۲۸۰۔ ۲۸۱۔ ۲۸۲۔ ۲۸۳۔ ۲۸۴۔ ۲۸۵۔ ۲۸۶۔ ۲۸۷۔ ۲۸۸۔ ۲۸۹۔ ۲۹۰۔ ۲۹۱۔ ۲۹۲۔ ۲۹۳۔ ۲۹۴۔ ۲۹۵۔ ۲۹۶۔ ۲۹۷۔ ۲۹۸۔ ۲۹۹۔ ۳۰۰۔ ۳۰۱۔ ۳۰۲۔ ۳۰۳۔ ۳۰۴۔ ۳۰۵۔ ۳۰۶۔ ۳۰۷۔ ۳۰۸۔ ۳۰۹۔ ۳۱۰۔ ۳۱۱۔ ۳۱۲۔ ۳۱۳۔ ۳۱۴۔ ۳۱۵۔ ۳۱۶۔ ۳۱۷۔ ۳۱۸۔ ۳۱۹۔ ۳۲۰۔ ۳۲۱۔ ۳۲۲۔ ۳۲۳۔ ۳۲۴۔ ۳۲۵۔ ۳۲۶۔ ۳۲۷۔ ۳۲۸۔ ۳۲۹۔ ۳۳۰۔ ۳۳۱۔ ۳۳۲۔ ۳۳۳۔ ۳۳۴۔ ۳۳۵۔ ۳۳۶۔ ۳۳۷۔ ۳۳۸۔ ۳۳۹۔ ۳۴۰۔ ۳۴۱۔ ۳۴۲۔ ۳۴۳۔ ۳۴۴۔ ۳۴۵۔ ۳۴۶۔ ۳۴۷۔ ۳۴۸۔ ۳۴۹۔ ۳۵۰۔ ۳۵۱۔ ۳۵۲۔ ۳۵۳۔ ۳۵۴۔ ۳۵۵۔ ۳۵۶۔ ۳۵۷۔ ۳۵۸۔ ۳۵۹۔ ۳۶۰۔ ۳۶۱۔ ۳۶۲۔ ۳۶۳۔ ۳۶۴۔ ۳۶۵۔ ۳۶۶۔ ۳۶۷۔ ۳۶۸۔ ۳۶۹۔ ۳۷۰۔ ۳۷۱۔ ۳۷۲۔ ۳۷۳۔ ۳۷۴۔ ۳۷۵۔ ۳۷۶۔ ۳۷۷۔ ۳۷۸۔ ۳۷۹۔ ۳۸۰۔ ۳۸۱۔ ۳۸۲۔ ۳۸۳۔ ۳۸۴۔ ۳۸۵۔ ۳۸۶۔ ۳۸۷۔ ۳۸۸۔ ۳۸۹۔ ۳۹۰۔ ۳۹۱۔ ۳۹۲۔ ۳۹۳۔ ۳۹۴۔ ۳۹۵۔ ۳۹۶۔ ۳۹۷۔ ۳۹۸۔ ۳۹۹۔ ۴۰۰۔ ۴۰۱۔ ۴۰۲۔ ۴۰۳۔ ۴۰۴۔ ۴۰۵۔ ۴۰۶۔ ۴۰۷۔ ۴۰۸۔ ۴۰۹۔ ۴۱۰۔ ۴۱۱۔ ۴۱۲۔ ۴۱۳۔ ۴۱۴۔ ۴۱۵۔ ۴۱۶۔ ۴۱۷۔ ۴۱۸۔ ۴۱۹۔ ۴۲۰۔ ۴۲۱۔ ۴۲۲۔ ۴۲۳۔ ۴۲۴۔ ۴۲۵۔ ۴۲۶۔ ۴۲۷۔ ۴۲۸۔ ۴۲۹۔ ۴۳۰۔ ۴۳۱۔ ۴۳۲۔ ۴۳۳۔ ۴۳۴۔ ۴۳۵۔ ۴۳۶۔ ۴۳۷۔ ۴۳۸۔ ۴۳۹۔ ۴۴۰۔ ۴۴۱۔ ۴۴۲۔ ۴۴۳۔ ۴۴۴۔ ۴۴۵۔ ۴۴۶۔ ۴۴۷۔ ۴۴۸۔ ۴۴۹۔ ۴۵۰۔ ۴۵۱۔ ۴۵۲۔ ۴۵۳۔ ۴۵۴۔ ۴۵۵۔ ۴۵۶۔ ۴۵۷۔ ۴۵۸۔ ۴۵۹۔ ۴۶۰۔ ۴۶۱۔ ۴۶۲۔ ۴۶۳۔ ۴۶۴۔ ۴۶۵۔ ۴۶۶۔ ۴۶۷۔ ۴۶۸۔ ۴۶۹۔ ۴۷۰۔ ۴۷۱۔ ۴۷۲۔ ۴۷۳۔ ۴۷۴۔ ۴۷۵۔ ۴۷۶۔ ۴۷۷۔ ۴۷۸۔ ۴۷۹۔ ۴۸۰۔ ۴۸۱۔ ۴۸۲۔ ۴۸۳۔ ۴۸۴۔ ۴۸۵۔ ۴۸۶۔ ۴۸۷۔ ۴۸۸۔ ۴۸۹۔ ۴۹۰۔ ۴۹۱۔ ۴۹۲۔ ۴۹۳۔ ۴۹۴۔ ۴۹۵۔ ۴۹۶۔ ۴۹۷۔ ۴۹۸۔ ۴۹۹۔ ۵۰۰۔ ۵۰۱۔ ۵۰۲۔ ۵۰۳۔ ۵۰۴۔ ۵۰۵۔ ۵۰۶۔ ۵۰۷۔ ۵۰۸۔ ۵۰۹۔ ۵۱۰۔ ۵۱۱۔ ۵۱۲۔ ۵۱۳۔ ۵

نہا \int_0^∞ فرلا \int_0^∞ جم (لاما) فرما = نہا \int_0^∞ جب (لاما) فرلا

$$= \text{نہا} \infty \leftarrow \infty \frac{\text{جب} \infty}{\infty} \text{رے} = .$$

لیکن اگر ملازم جم (لاما) درما ایک معین مقدار نہیں ہے۔

ہم صورت حال کو اسطور پر بھی بیان کر سکتے ہیں

[illegible]

- نیا جڑ جڑ فافا (۱) (۵)

ہمیں ثابت کرنا چاہیے کہ آخری تھکدہ صفر کی طرف مائل ہوتا ہے جیسے ہا
لائٹناہی کی طرف مائل ہوتا ہے، اوپر کے مسئلہ کے لئے ثبوت وقفہ ۱،

مسئلہ ۳ کے اندر شامل لیگا۔

یکساں استدقاق بالعموم ایسا ممکن ہے کہ تکملہ (۱) یکساں طور پر

مستدق ہو بالتمام وقفوں (و، ج، عا) (ج، عا، ب) میں جہاں
و \geq ج \geq ب اور عا، عا، اختیاری چھوٹی مثبت مقداریں
ہیں یعنی استدقاق ج کے پاس یکساں نہیں رہتا۔

اگر ج جیسی قیمتیں تعداد میں محدود ہوں تو اسے ہم یوں بیان کرینگے کہ
تکملہ تمام وقفہ (و، ب) میں عام طور پر یکساں استدقاق رکھتا ہے
اگر ج = و تو ہم لے سکتے ہیں عا = و اور اگر ج = ب تو عا = و لیا جاسکتا ہے

مسئلہ ۲۔ اگر تکملہ (۱) محض عام طور پر یکساں استدقاق رکھتا ہو
لیکن تکملہ (۳) مسلسل تغاقل ہو ما کا سمت و \geq ما \geq ب کے لئے تو

ک، و، ما، ک، ف، ا، لا، ما، و، لا = ک، و، لا، ک، ف، ا، لا، ما، و، لا... (۶)

جہاں اوپر کی حد ما کوئی عدد ہے وقفہ (و، ب) کے درمیان۔
مسئلہ ۱ دفعہ ۲ کی یہ توسیع ہے، فرض کرو کہ صرف ایک نقطہ ج ایسا
اور و $>$ ج $>$ ما، اگر ایک سے زیادہ ایسے نقطے ہوں تو اسی استدلال
کو مکرر استعمال کیا جاسکتا ہے۔ تکملہ (۱) کو ف (ما) سے تعبیر کرو تب
(مقابلہ کرو دفعہ ۶۵ کے ساتھ)

ک، ف (ما) فرما = نہا، ک، ف (ما) فرما + نہا، ک، ف (ما) فرما (تعریف کی)

نہا، ک، و، لا، ک، ف، ا، لا، ما، و، لا + نہا، ک، و، لا، ک، ف، ا، لا، ما، و، لا

[مسئلہ ۱ دفعہ ۲ کی رو سے]

$$= \text{ف}^{\circ}\text{ر}^{\circ}\text{ف}^{\circ}\text{ا}^{\circ}\text{م}^{\circ} + \text{ف}^{\circ}\text{ر}^{\circ}\text{ف}^{\circ}\text{ا}^{\circ}\text{م}^{\circ}$$

کیونکہ تکملہ (۳) مسلسل ہے اور ہم عا۔ = ۰، عا۔ = ۰ بنا سکتے ہیں۔ اس سے مسئلہ ثابت ہوتا ہے کیونکہ ان تکملوں کا مجموعہ (۶) کے بائیں جانب کے تکملہ کے مساوی ہے۔
یہ یاد رہے کہ (۳) مسلسل ہوگا اگر یہ وقفہ (د، ب) میں یکساں طور پر مستند ہو۔

سئلہ ۳۔ مساوات (۴) اس صورت میں بھی درست رہتی ہے جبکہ تکملہ (۱۱) یکساں طور پر مستحق ہو بالعموم بشرطیکہ مسئلہ (۱) کے اور شرائط پورے ہوں، یہ مسئلہ نمبر بالا کا سیدھا نتیجہ صریح ہے۔

سئلہ ۴۔ اگر تکملہ (۱۱) اور (۲) یکساں طور پر مستحق ہوں محض عام طور پر ہر اس دفعوں (ا، ب، د، ب) میں بالترتیب، لیکن اگر تکملہ (۳) اور متناظر تکملہ

فَإِذَا (لا، ما) فَرَا (س)

یکساں طور پر مستحق ہوں سر اسرار محمد و دو قفوں مآ کے اور لا کے اور
میں بالترتیب تو مسادات (۴) درست رہتی ہے بشرطیکہ (۴) میں کا ایک
تکمیلہ قابل تعین ہو۔

فرض کرو کہ (۴) کے بائیں جانب کا حملہ \vec{F}_1 فرما (لاؤ) فرما

قابل یقین ہے اور اس کو اسے تعبیر کر دیتے ہیں (مقابلہ کرو دفعہ ۶۴ کے ساتھ)

[illegible]

چونکہ کلمہ (۳) مسلسل ہے اسلئے مسئلہ (۲) کی رو سے

اجدا > صہ اگر ما < ن اسلے احب (ما) > ۱ > ۳ صہ اگر ما < ن
دوسرے الفاظ میں نہ صاحب (ما) = جبکہ ما < ∞ پس مسئلہ
ثابت ہوتا ہے۔

نتیجہ صریح۔ اگر فا (لا، ما) ہمیشہ مثبت ہو تو تکملوں (۳)، (۳) کا
استدقاق اس امر سے حاصل ہو سکتا ہے کہ (۴) کا ایک تکملہ قابل تعین
ہے۔ طالب علم کے لئے اچھی مشق ہوگی کہ وہ اس بیان کی صداقت
قائم کرے۔ اس لئے اگر فا (لا، ما) مثبت ہو تو مسئلہ (۴) بہت مختصر
ہو جاتا ہے کیونکہ تکملوں (۳) اور (۴) سے قطع نظر کی جاسکتی ہے۔

نوٹ۔ دفعات ۲، ۳، ۴ کے مختلف مسائل کے جواز کے لئے جو شرائط
بیان کئے گئے ہیں وہ محض کافی ہیں ضروری نہیں۔ یہ بھی ہمیشہ یاد رکھنا
چاہئے کہ تفاعیل زیر بحث سلسل فرض کئے گئے ہیں۔

۴۔ دیگر غیر واجب تکملے۔ جب شکل غیر سلسل تفاعل
ہو تو تغیر کی تبدیلی یا تکمل بالحصص سے بعض اوقات یہ عدم تسلسل دور
ہو سکیگا اور اوپر کے مسائل لگ سکیں گے۔

مثلاً اگر > ن > ۱ تو دونوں قولاً لا ن اور قولاً لا ن لوک لا

غیر سلسل ہیں جبکہ لا = ۱ اور مرجان (ن) معلوم کرنے کے لئے ہم
مسئلہ ۲ دفعہ ۲ سیدھا نہیں لگا سکتے۔ لیکن تکمل بالحصص مجان (ن) = جان (۱+ن)

اور مرجان (ن) = جان (۱+ن) + ۱ قولاً لا ن لوک لا ن = قولاً لا ن لوک لا ن
اور یہی تکملہ مسئلہ ۲ دفعہ ۲ کو سیدھا لگانے سے حاصل ہوگا (نیز ملاحظہ ہو مثال ۵ نیچے)
دفعہ ۶۹ کے مسئلوں کو ذیل کی تعریف کے زیر عمل

محدود حدود والے تکملہ کی صورت میں بھی توسیع دی جاسکتی ہے جس میں
تکملہ ایک حد پر لامتناہی ہو جائے۔
تعریف۔ اگر ف (لا، ما) مسلسل ہو سرسرقہوں

$$1 > لا \geq ب، 1 \geq ما \geq ب$$

میں لیکن لامتناہی ہو جائے لا = 1، ما = ما کے لئے تو تکملہ

$$ف (ما) = 1 \text{ ف (لا، ما) فرلا} \dots \dots \dots (1)$$

یکساں طور پر مستحق کہلاتا ہے سرسرقہ 1 $\geq ما \geq ب$ میں اگر ایک
عدد لا ایسا موجود ہو جو فاکر منحصر نہ ہو اور جبکہ 1 $> لا > 1 + لا$ تو

$$1 \text{ ف (لا، ما) فرلا} > ص \dots \dots \dots (2)$$

اگر ف (لا، ما) لامتناہی ہو جبکہ لا = ب، ما = ما تو (2) کے جواب میں
تکملہ کے حدود لا اور ب ہونگے ایسے کہ ب - لا $> لا > ب$

طالب علم باسانی ثابت کر سکیگا کہ مسئلہ 1 دفعہ 1 اور مسائل 2، 1 دفعہ 2
(مناسب ترکیبوں کے ساتھ) غیر واجب تکملہ (1) کی صورت میں بھی نہیں
ہم ذیل کی چند مثالوں کے ساتھ ختم کرتے ہیں۔

$$\text{مثال 1۔ ثابت کرو کہ } 1 = 1 \text{ تو } 1 = 1 = \frac{1}{1}$$

متغیر کو لا میں ابدال = لا ما کے ذریعہ تبدیل کرو تب

$$1 = 1 \text{ تو } 1 = 1 \text{ ما فرلا}$$

تو 1 سے ضرب دو اور ما = 1 سے ما = 1 تک تکمل کرو اس طرح

$$1 = 1 \text{ تو } 1 = 1 \text{ ما فرلا} = 1 \text{ تو } 1 = 1 \text{ ما فرلا}$$

$$\text{جم } ۲ \text{ ج لا درلا} = \frac{\pi}{\text{جان (لا}^۱\text{)}} \cdot \text{فو}^{\infty} - (\text{لا}^۱ + \frac{\pi}{\text{جان}}) \cdot \text{لا}^۲ - \text{لا}^۲ \text{ درلا}$$

$$\text{جان (لا}^۱\text{)} = \frac{\pi}{\text{فو}^{\infty} - (\text{لا}^۱ + \text{ما}^۱ - \text{ن}^۱ - \text{فرما}^۱)} \quad (\text{مثال ۱، شق ۹})$$

جم ۲ ج لا کے ساتھ ضرب دو اور لا = . سے لا = تک تکمل کرو اور
مکرر تکملہ میں تکمل کی ترتیب بدلو۔ اس طرح

$$\text{جان (لا}^۱\text{)} = \frac{\pi}{\text{فو}^{\infty} - (\text{لا}^۱ + \text{ما}^۱ - \text{ن}^۱ - \text{فرما}^۱)} \cdot \text{فو}^{\infty} - \text{جم } ۲ \text{ ج لا درلا}$$

$$\pi = \frac{\pi}{\text{فو}^{\infty} - (\text{لا}^۱ + \text{ما}^۱ - \text{ن}^۱ - \text{فرما}^۱)} \cdot \text{فو}^{\infty} - \text{ما}^۲ \quad [\text{مثال ۵، دفعہ ۲}]$$

$$\pi = \frac{\pi}{\text{فو}^{\infty} - (\text{لا}^۱ + \text{لا}^۲ + \text{چ}^۱)} \cdot \text{فو}^{\infty} - \text{لا}^۲ - \text{ن}^۲ - \text{درلا}^۲ \text{ ابدال ما} = \text{لا}^۲$$

کی مدد سے۔
ابھی ہمیں یہ دیکھنا ہے کہ تکمل کی ترتیب کا بدلنا جائز ہے۔ تکمل کو
فا (لا، ما) سے تعبیر کرو۔

$$\text{اے فا (لا، ما) درلا} = \text{ما}^۱ \cdot \text{فو}^{\infty} - \text{جم } ۲ \text{ ج لا درلا} > \text{ما}^۱ \cdot \text{فو}^{\infty} - \text{لا}^۱ \cdot \text{فو}^{\infty} - \text{لا}^۱ \cdot \text{درلا}$$

اگر دے۔ تو تکملہ $\text{فو}^{\infty} - \text{لا}^۱ \cdot \text{ما}^۱$ چھوٹا ہے ہر ایسے $\text{ما}^۱ \leq \text{دے}$ کے لئے جبکہ

ن بڑا ہو۔ نیز $\text{ما}^۱ - \text{فو}^{\infty}$ محدود ہے ہر $\text{ما}^۱ \leq \text{دے}$ کے لئے۔ اسلئے

اے فا (لا، ما) درلا یکساں طور پر مستحق ہے عام طور پر اختیار

دفعہ (۰، ب) کے اندر۔ اور یہ آسانی سے دیکھا جاسکتا ہے کہ دفعہ ۲،

مسئلہ ۳ کے باقی شرائط پورے ہوتے ہیں، اس لئے تکمل کی ترتیب کا بدلنا جائز ہے۔

مثال ۳۔ اگر $\frac{1}{2} < \frac{1}{3} < \frac{1}{4}$ ، ج < 0 ، ن ≤ 1 تو ثابت کرو کہ

$$\text{جان (ج)} = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \quad \text{فرما } \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \quad \text{فرما } \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \quad \text{فرما } \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

لا کی بجائے $\frac{1}{2}$ رکھنے سے دائیں جانب کا رکن ہو جاتا ہے

$$\text{جان (ن)} = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

اور مثال (۱) کی طرح $\frac{1}{2}$ جان (ن) کے لئے ایک تکملہ رکھنے سے یہ ہو جاتا ہے

$$\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) \frac{1}{2} = \frac{1}{6} \quad \text{فرما } \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \quad \text{فرما } \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \quad \text{فرما } \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \quad \text{فرما } \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \quad \text{فرما } \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \quad \text{فرما } \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \quad \text{فرما } \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \quad \text{فرما } \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

اہمال $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$ ج $+ لا$ کی مدد سے

تکمل کی ترتیب بدلنے کے جواز پر ہم بحث نہیں کرتے لیکن اس کا ثبوت دفعہ ۳ مسئلہ ۴ نتیجہ صریح کے ذریعہ باسانی حاصل ہو سکتا ہے۔

یہ مثال، مثال ۲ سے ملا کر ایک دلچسپ نتیجہ پیدا کرتی ہے۔

مثال ۴۔ اگر $E = \frac{1}{2} \frac{F}{J} \frac{F}{J} \frac{F}{J}$ اور $0 < A < B$ تو $\frac{F}{J}$ معلوم کرو۔

$\frac{F}{J} = \frac{1}{2} \frac{F}{J} \frac{F}{J} \frac{F}{J}$ ۔ لوک (جب لا) فرلا (۱)
بشرطیکہ تکملہ یکساں طور پر مستحق ہوتا ہے۔
اب رکھو ما = جب لا، تو حاصل ہوگا

$$\frac{1}{J} \frac{F}{J} \frac{F}{J} \frac{F}{J} = \frac{1}{J} \frac{F}{J} \frac{F}{J} \frac{F}{J} \times \frac{1}{J} \frac{F}{J} \frac{F}{J} \frac{F}{J}$$

$$> \frac{1}{J} \frac{F}{J} \frac{F}{J} \frac{F}{J} \frac{F}{J} \frac{F}{J} \frac{F}{J} \frac{F}{J}$$

$$> \frac{1}{J} \frac{F}{J} \frac{F}{J} \frac{F}{J} \frac{F}{J} \frac{F}{J} \frac{F}{J} \frac{F}{J}$$

چونکہ جب لا لوک (جب لا) لا کے ساتھ صفحہ کی طرف مستحق ہوتا ہے اس لئے صریحاً دفعہ ۴ کی تعریف کے شرائط پورے ہوتے ہیں اس لئے (۱) کا تکملہ یکساں طور پر مستحق ہوتا ہے اور مساوات (۱) سے $\frac{F}{J}$ حاصل ہوتا ہے۔

مثال ۵۔ جا (ن) = $\frac{1}{2} \frac{F}{J} \frac{F}{J} \frac{F}{J} \frac{F}{J}$ اور لا کے شتوق معلوم کرو۔

اگر ن ۱ تو دفعہ ۲ سئلہ ۲ لگ سکتا ہے کیونکہ لا لا لوک لا صفحہ کی طرف استدقاق کرتا ہے لا کے ساتھ اگر ن ۱ اور م مثبت ہوں (مثال ۱۰، شتوق، حصہ اول) اس اتہا کو ہم تفاعل کی قیمت مانتے ہیں جبکہ لا = ۱، اگر ن ۱ تو لکھو

$$\text{جا (ن)} = \frac{1}{2} \frac{F}{J} \frac{F}{J} \frac{F}{J} \frac{F}{J} + \frac{1}{2} \frac{F}{J} \frac{F}{J} \frac{F}{J} \frac{F}{J} = ۱ + ۱ = ۲ \text{ (لکھو)}$$

$$-8 \quad \int_0^{\infty} \frac{r^n \log r}{r^n + 1} dr = \frac{\pi}{2} \cot \frac{\pi}{2n+2} \quad \text{ن. 15}$$

$$-9 \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_1(x) + f_2(x)}{f_1(x) - f_2(x)} dx = \frac{\pi}{\alpha} \cot \frac{\pi \alpha}{2} - \frac{\pi}{\beta} \cot \frac{\pi \beta}{2} \quad -1 > \alpha > -1$$

$$-1. \int_0^{\infty} \frac{J_0(x) - J_2(x)}{x^2} dx = \frac{\pi}{4} (b-a) \quad (b' < a' < b < a).$$

$$-11 \quad \int_0^{\infty} \frac{\log(1+x^2)}{1+x^2} dx = \pi \log 2 = \pi \log(1+1) \quad \text{for } 1 \leq 1.$$

۱۲- $\int \frac{1 + \sqrt{1-x^2}}{x^2} dx = \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1-x}{1+x} \right| + C$

$$-13- \quad \int_0^{\infty} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} dx = \frac{\pi}{2}$$

۱۲- $\int_0^{\infty} x^{\frac{1}{2}} \ln x \, dx = -\frac{2}{3} \sqrt{\pi}$ و $\frac{\pi}{12}$

$$-16 \quad \int_0^{\infty} \frac{\text{جم والا فرلا}}{(r(rN+r))^{x+1}} = \left(\frac{1}{rB} + \frac{1}{rB} \right) \frac{\pi}{r(x+1)} \quad \text{قواب}$$

$$-12 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} = \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots \right)$$

$$-14 \quad \int_0^{\infty} \frac{\text{لاجب ولا ولا}}{(x^2 + 1)^2} = \frac{\pi}{2} \times \frac{1}{1} = \frac{\pi}{2} \quad \text{و- جواب}$$

$$-1) \quad \int_0^{\infty} \frac{r \ln r}{(r^2 + 1)^2} dr = \frac{\pi}{8}$$

$$-14 \quad \int_0^{\infty} \frac{y^a (1+y)^a}{(1+y^2)^a} dy = \frac{\pi}{y^a} \left\{ 1 - \frac{1+y^2}{2} \right\} \quad \text{جب } a=1$$

$$(۲) \int_0^{\infty} \left\{ (n - \frac{1}{p}) \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \right) + \frac{1}{p} \right\} \frac{1}{x} dx$$

$$= (n - \frac{1}{p}) \log n - (n - \frac{1}{p})$$

۲۵۔ مثال ۲۵ مشق ۱۳ کے دوسرے ٹکڑے کو تفریق کرنے سے مثال ۲۴ مشق ۱۳ کی مساوات قائم کرو۔

۲۶۔ اگر جے (لا) = $\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(x) dx$ (لاجم ط) فرطاً تو ثابت کرو کہ (ب) < (ج)

$$\int_0^{\pi} \cos(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(x) dx$$

جہاں جے (لا) سے مراد ہے $\int_0^{\pi} \cos(x) dx$ اگر $m > 0$ تو ثابت کرو کہ

$$\int_0^{\pi} \cos(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(x) dx$$

۲۸۔ اگر $\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(x) dx$ جب لا عدا تو ثابت کرو کہ

$$(۱) \frac{\text{جف و}}{\text{جفت}} = \frac{\text{جف و}}{\text{جفت}} \quad (۲) \text{و} = \text{و جبکہ } 0 < \text{و}$$

۲۹۔ اگر $\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(x) dx$ تو ثابت کرو کہ

$$(۱) \frac{\text{جف و}}{\text{جفت}} = \frac{\text{جف و}}{\text{جفت}} \quad (۲) \text{و} = \text{و جبکہ } 0 < \text{و}$$

[یہ دیکھا جائے کہ

$$\frac{\text{جف ف (ع)}}{\text{جف ت}} = \frac{\text{فر ف (ع)}}{\text{فر ع}} = \frac{\text{جف ع}}{\text{جف ت}} = \frac{\text{ف (ع)}}{\text{ف ت}} = \frac{\text{عما اگت}}{\text{ت}}$$

$$\frac{\text{ف (ع)}}{\text{ف ت}} = \frac{۱}{\frac{\text{اگت}}{\text{فر ع}}}$$

اور ف (ع) کو محدود مانو جبکہ $\infty \pm$

$$۳۰۔ \text{اگر } \frac{۲}{۱۱} = \frac{\text{اگت}}{\text{فر ع}} \text{ تو عما فر ع تو ثابت کر دو کہ}$$

$$(۱) \frac{\text{جف و}}{\text{جف ت}} = \frac{\text{جف و}}{\text{جف لا}} \text{ کہ جف و (۲) نہا و = و ' لا <}$$

$$۳۱۔ \text{اگر } \frac{\text{فرت}}{\text{لا (لا ت) (ما ت) (می ت)}} \text{ اور لا ' ما می سب مثبت ہوں تو ثابت کرو کہ}$$

$$(۱) \frac{\text{جف لا}}{\text{جف لا}} + \frac{\text{جف ما}}{\text{جف ما}} + \frac{\text{جف ع}}{\text{جف ع}} = \frac{۱}{\text{لا ما می}}$$

$$(۲) \frac{\text{جف لا (لا ت)}}{\text{جف لا}} = \frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}} = \frac{\text{جف ع}}{\text{جف ما}}$$

$$(۳) \frac{\text{لا جف لا}}{\text{لا جف لا}} + \frac{\text{ما جف ع}}{\text{ما جف ع}} + \frac{\text{می جف ع}}{\text{می جف ع}} = \frac{۱}{۲}$$

$$۳۲۔ \text{اگر } \frac{\text{اگت}}{\text{فر ع}} = \frac{\text{اگت}}{\text{فر ع}} \text{ تو لا ' جم (۲) فر لا ' و = ک تو جب (۱) فر لا}$$

$$\text{تو ثابت کرو کہ } \frac{\text{فر ع}}{\text{فر و}} = ۲ \text{ و } \frac{\text{فر و}}{\text{فر و}} = ۲$$

اور پھر ثابت کرو کہ

باب دہم

فوریہ کے سلسلے

۵۔۔۔ فوریہ کے سلسلے۔ فرض کرو کہ سمت - $\pi \geq \text{لا} \geq \pi$ کے لئے تفاعل ف (لا) ذیل کے لاستناہی سلسلہ سے تعبیر ہو سکتا ہے

ف (لا) = $\{ + \} \text{چچ} \text{ان جمن لا} + \text{چچ} \text{جبن لا} \dots (1)$

نیز یہی مان لو کہ ف (لا) کا تکملہ اس سلسلہ کو رقم بر رقم تکمیل کرنے سے حاصل ہو سکتا ہے۔ ایسی صورت میں سرور $\{ + \} \text{ان جمن کو بطور محدود تکملوں کے بیان کرنا ممکن ہے۔}$

سب سے پہلے یہ قابل توجہ ہے کہ ذیل کے دونوں تکملے (م) مثبت صمچ ہیں

$\{ + \} \text{جمن لا جمن لا فرلا}$ $\{ + \} \text{جبم لا جبم لا فرلا}$

صفر ہوتے ہیں اگر م' غیر سادی ہوں لیکن ان میں سے ہر ایک π کے سادی ہے

اگر م = ن۔ نیز تکملہ $\{ + \} \text{جمن لا جبم لا فرلا}$ ہمیشہ صفر ہوتا ہے۔ یہ نتائج جیوب اور

جیوب اتمام کے حاصل ضربوں کو بطور حاصل جمع اور حاصل تفریق کے بیان کرنے کے آسانی ثابت ہو سکتے ہیں۔

اب مساوات (۱) کے ہر رکن کو - π سے π تک تکمیل کرو، سلسلہ کا ہر تکملہ سوائے پہلے کے صفر ہوتا ہے اور ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

قبول نہیں کر لیا جاسکتا۔ دراصل ایک مدت سے یہ دیکھ لیا گیا ہے کہ یہ مستحکم ہے۔ اس مفروضہ کے جواز کو ثابت کرنے کا سب سے آسان طریقہ یہ ہے کہ ہم یہ دکھادیں کہ جیسے n لا متناہی کی طرف مائل ہوتا ہے سلسلہ (۱) کی پہلی $(n+1)$ رتوں کا مجموعہ S_{n+1} جبکہ اس کے سر (۲)، (۳)، (۴) کی رو سے دریا

کرنے جائیں فی الحقیقت قیمت χ (لا) کی طرف مستقر ہوتا ہے۔ زیادہ وضاحت کی خاطر رشتہ دفعہ کی مساواتوں (۲)، (۳)، (۴) میں مکمل کے متغیر کو χ اور χ کو S_{n+1} سے ذیل کا مجموعہ تعبیر ہوتا ہے۔

$$S_{n+1} = 1 + \chi^n \quad (\text{ان جم } n \text{ لا} + \text{جب } n \text{ لا})$$

یہ مجموعہ اس شکل میں لکھا جاسکتا ہے

$$S_{n+1} = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left\{ 1 + \frac{\chi^n}{2} \right\} \chi^n \text{ جم } (n-1) \text{ لا} \{ \text{ف } (n-1) \text{ و } \dots (1) \}$$

یا خطوط وحدانی کے اندر کے سلسلہ کو جمع کرنے سے

$$S_{n+1} = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \text{ف } (n-1) \text{ لا} \{ \text{جب } (n+1) \text{ لا} - \frac{n-1}{2} \text{ و } \dots (2) \}$$

فرض کرو کہ $n-1=2$ ، ہمیں حاصل ہوگا

$$S_{n+1} = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \text{ف } (2+1) \text{ لا} \{ \text{جب } (2+1) \text{ لا} - \frac{2-1}{2} \text{ و } \dots (3) \}$$

آخر الامر مکمل کی سمت کو ان حصوں میں تقسیم کرو $\left[-\frac{1}{4} (2+1) \right]$ اور $\left[\frac{1}{4} (2-1) \right]$

اس طرح سے دو تکملے حاصل ہوتے ہیں پہلے میں π کی بجائے $-\pi$ رکھو اس طرح میں
کے لئے ذیل کے دو تکملے حاصل ہوتے ہیں

$$\text{میں } \frac{1}{\pi} = \int_{\pi}^{\pi+\pi} f(\pi+\pi) \text{ جب } \frac{1}{\pi} \text{ جب } \frac{1}{\pi} \text{ دو}$$

$$+ \int_{\pi}^{\pi+\pi} f(\pi-\pi) \text{ جب } \frac{1}{\pi} \text{ جب } \frac{1}{\pi} \text{ دو} \dots (۳)$$

اب $f(\pi)$ پر تحقیق نہیں ہم بیان کرتے ہیں۔ یہ محض کافی ہیں
ضروری نہیں۔

تفاعل پر قیود۔ (۱) تفاعل کو محدود ہونا چاہیے جس کی عددی

قیمتوں کی اوپر کی حد مثلاً π ہو (۲) بالعموم اسے مسلسل ہونا چاہیے لیکن
ایسے محدود تعداد محدود عدم تسلسل کی ہو سکتی ہے جن کی دفعہ ۲۳ میں
توضیح کی گئی ہے (۳) اس کی موثر قیمتوں کی تعداد محدود ہونی چاہیے (مثلاً
تفاعل ایسا جب $\frac{1}{\pi}$ نہیں ہو سکتا)

اگر π کوئی جھوٹا گزرتا ہے تب تک عدد ہو تو دفعہ (ج۔ عا، ج۔ عا) کو ہم
ج کی پروس یا قرب کہیں گے۔ اکثر قیمت ج (دفعہ ۵، حصہ اول) کی بجائے
ہم نقطہ ج کہیں گے۔

ترقیم $f(\pi \pm \pi)$ کو اکثر استعمال کیا جائیگا (دفعہ ۲۴، حصہ اول، دفعہ ۲۳)۔
اب سوال ہمارے سامنے یہ ہے۔ جس یہ دکھانا چاہیے کہ جب π لانا ہی
کی طرف مائل ہوتا ہے تو میں قیمت

$$\frac{1}{\pi} \{ f(\pi + \pi) + f(\pi - \pi) \}$$

کی طرف مائل ہوتا ہے اگر $\pi \pm \pi$ کے مساوی نہ ہو اور

$$\frac{1}{\pi} \{ f(\pi - \pi) + f(\pi + \pi) \}$$

اب $\frac{1}{m} \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m} \right) = \frac{1}{m} \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m} \right) = \frac{1}{m} \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m} \right)$

$$= \frac{1}{m} \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m} \right) = \frac{1}{m} \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m} \right)$$

$$\frac{1}{m} \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m} \right) = \frac{1}{m} \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m} \right)$$

$$\text{اور } \frac{1}{m} \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m} \right) > \frac{1}{m} \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m} \right) \dots \dots \dots (2)$$

مقادیر پ، ع متبادل لا پر منحصر نہیں ہیں، اسلئے جب 'م' لامتناہی کی طرف
اُل ہوتا ہے تو مکملہ (۱) یکساں طور پر صفر کی طرف اُل ہوتا ہے۔
نوٹ۔ اگر پ، لا پر منحصر ہو تو بھی ہم تسلیم کر سکتے ہیں کہ اسکی قیمت کی محدود اوپر کی حد ہے
جو لا پر منحصر نہیں۔
اسی طرح سے دکھایا جاسکتا ہے کہ مکملہ

$$\frac{1}{m} \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m} \right) \dots \dots \dots (3)$$

یکساں طور پر صفر کی طرف اُل ہوتا ہے جیسے 'م' لامتناہی ہو۔
اب فرض کرو کہ $\frac{1}{m} > \frac{1}{m}$ یعنی قیمتیں اسب مثبت ہیں۔ ہم ثابت کرینگے کہ مکملہ

$$\frac{1}{m} \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m} \right) \dots \dots \dots (4)$$

یکساں طور پر صفر کی طرف اُل ہوتا ہے جبکہ 'م' لامتناہی کی طرف جاتا ہے۔

$$\frac{1}{m} \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m} \right) = \frac{1}{m} \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m} \right) = \frac{1}{m} \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m} \right)$$

$$= \text{فدا (۱) } \int \frac{\text{جب } ۱}{و} \text{ فرد} + \text{فدا (۱) } \int \frac{\text{جب } ۱}{و} \text{ فرد} =$$

لیکن '۱' ضما' ۱ سب مثبت ہیں اور تکملہ $\int \frac{\text{جب } ۱}{و}$ فرد مستحق ہے، اسلئے

ہم ہر اس طور پر منتخب کر سکتے ہیں کہ ہر ایسے م کے لئے جو ہر سے بڑا ہو بائیں اٹھ کے دونوں تکملوں میں سے ہر ایک، ایک دی ہوئی چھوٹی اختیاری مثبت مقدار صدر سے کم ہو۔ اسی طریق سے جیسے لاتساوی (۲)، حاصل کی گئی تھی ہم دیکھتے ہیں کہ ہر ایسے م کے لئے جو ہر سے بڑا ہو

$$| \int \text{فدا (۱) } \int \frac{\text{جب } ۱}{و} \text{ فرد} | > ۲ (پ + ۱) ع صا$$

پس تکملہ (۴) مستحق ہوتا ہے جیسے بیان ہوا۔ صریحاً ہی نتیجہ حاصل ہوتا ہے اگر نکالے جائیں۔

اس نتیجہ کا ایک خاص نتیجہ یہ ہے کہ ∞ کے لئے فرد سے سلسلہ کے سروں (۱) جب کی انتہا صفر ہوتی ہے کیونکہ ان سروں کی صورت وہی ہے جو اوپر بحث میں آنے والے تکملوں کی ہے۔ لیکن ان سب کی چھٹائی کا

رتبہ بالعموم ۱۔ ہو گا جیسا لاتساوی (۲) سے ظاہر ہے، پس اگر سلسلہ مستحق ہو بھی تو یہ استنتاج بالعموم شرطیہ ہو گا۔

۸۔ سلسلوں کا جمع کرنا۔ سادات (۳) دفعہ ۴ کا پہلا تکملہ '۱' ہمیں

۲ + ۱ کی بجائے م رکھو اور شکل کو اس شکل میں لکھو

$$ف (۱ + ۲) \int \frac{\text{جب } ۱}{و} \times \frac{\text{جب } ۱}{و} = \text{فدا (۱) } \int \frac{\text{جب } ۱}{و}$$

$$\text{یعنی فدا (۱) } \int \frac{\text{جب } ۱}{و} = \text{فدا (۱) } \int \frac{\text{جب } ۱}{و} = \text{فدا (۱) } \int \frac{\text{جب } ۱}{و}$$

اب نکر کر کو لا کسی نقطہ عدم مسلسل کی پڑوس میں نہیں ہے ایسا ہونے کی صورت دفعہ ۹ء میں بحث میں لائی جائیگی۔ ہم کو اتنا چھوٹا لے سکتے ہیں کہ ہر لا زیر بحث کے لئے اسسا (لا) اتنا چھوٹا ہو جتنا ہم چاہیں۔ جب پیمائشی کے درجہ مطلوبہ کے موافق لا کا انتخاب کر لیا جائے تو ہم کو مقدر بڑا لیکن محدود دے سکتے ہیں کہ مکملہ

$$\frac{1}{2} \text{ یا } \frac{1}{3} \text{ در}$$

اپنی اتھا $\frac{1}{2}$ سے اس قدر کم تفاوت ہو جقدر ہم چاہیں اور اساتھ ہی مکملہ (۲) صفر سے اتنا کم تفاوت ہو جتنا ہم چاہیں۔ اب چونکہ (۴) میں اسسا (لا) کا تقریباً محدود ہے (۲ سے بڑا نہیں) اسلئے ہم کو ہم اتنا بڑا لے سکتے ہیں کہ (۴) کے بائیں جانب کا رکن $\frac{1}{2}$ π ف (لا) سے اتنا کم تفاوت ہو جتنا ہم چاہیں خواہ لا کی کبھی ہی قیمت ہو البتہ سوائے ان قیمتوں کے جو خارج کر دی گئی ہیں) ہمیں بالآخر یہ نتیجہ حاصل ہوتا ہے

$$\text{نہا } \int_0^{\infty} \frac{1}{x^2} f(x) dx = \frac{1}{2} \text{ جب } \frac{1}{x^2} \text{ در } \frac{1}{x^2} \text{ ف (لا) } (0+0) \dots (5)$$

ٹھیک اسی طرح کے عمل سے ہم دیکھتے ہیں کہ اگر لا π کے مساوی نہ ہو اور نہ ہی یہ نقطہ عدم مسلسل کی پڑوس میں ہو تو

$$\text{نہا } \int_0^{\infty} \frac{1}{x^2} f(x) dx = \frac{1}{2} \text{ جب } \frac{1}{x^2} \text{ در } \frac{1}{x^2} \text{ ف (لا) } (0-0) \dots (6)$$

$$\text{اور اسلئے نہا } \int_0^{\infty} \frac{1}{x^2} f(x) dx = \frac{1}{2} \{ \frac{1}{x^2} \text{ ف (لا) } + \frac{1}{x^2} \text{ ف (لا) } \} \dots (7)$$

جہاں انتہا کی طرف استدقاق یکساں ہے۔ یہ شاہدہ طلب ہے کہ مساوات (۳) کی رو سے لا کی کسی دی ہوئی قیمت

کے لئے سب کی انتہا اس قیمت کے پڑوس میں صرف ف (لا) کے

روئے پر منحصر ہے۔
سب کی انتہا فیصلہ اس صورت میں جبکہ لا = π یا لا = $-\pi$ آسانی

ہو سکتا ہے۔ اگر لا = π تو (۳) دفعہ ۷۶ سے ہم دیکھتے ہیں کہ

$$\text{سب} = \frac{1}{\pi} \left\{ \text{ف} (۱ - \pi) - \frac{\text{جب} (۱ + \pi)}{\text{جب} ۱} \right\}$$

$$= \frac{1}{\pi} \left\{ \text{ف} (۱ - \pi) + \text{ف} (۱ + \pi) - \frac{\text{جب} (۱ + \pi)}{\text{جب} ۱} \right\}$$

ست (۱) کو حصوں (۱) $\left(\frac{\pi}{2} \right)$ $\left(\frac{\pi}{2} \right)$ میں تقسیم کرنے سے اور حدود
(۱) $\left(\frac{\pi}{2} \right)$ والے تکرار میں وکی بجائے π - ورکھنے سے۔

$n = \infty$ کے لئے انتہا ٹھیک پہلے کی طرح معلوم ہوتی ہے اور وہ ہے

$$\frac{1}{\pi} \{ \text{ف} (۱ - \pi) + \text{ف} (۱ + \pi) \}$$

اور یہی قیمت حاصل ہوتی ہے جبکہ لا = $-\pi$

۷۹۔ عدم تسلسل اب فرض کرو کہ لا ایک نقطہ عدم تسلسل کی
پڑوس میں ہے۔ نیز فرض کرو کہ شکل ۳۴ دفعہ ۶۲ 'ف (لا) کے گراف کو
تقسیم کرتی ہے جہاں $و = ع = ج$

$$۱) ع = ع = ع اور ۱) \geq لا \geq و \geq ع۔ اگر لا = وک$$

تو تعین ف (لا) اور ف (لا + و) ع ص کی متقابل جانبوں میں
واقع ہونگے جب تک کہ ۲ و کم نہ ہوگ ع سے پس متقابل سارا (لا + و)

ترسی نقطہ نظر سے سمت کی یہ تبدیلی مبدأ کو $(-\pi)$ پر لجانے کے سوا دل ہے اور تکلیف نقطہ نظر سے لا کی بجائے ہم π رکھتے ہیں۔ اگر ف $(\pi - \pi)$ کو فار (π) سے تعبیر کریں تو سوں کی قیمتیں یہ معلوم ہوتی ہیں

$$\begin{aligned} \text{ا} = \frac{1}{\pi} \text{ ف (ا) (مر لا) } \dots (1) \quad \text{ا} = \frac{1}{\pi} \text{ ف (ا) (جم ن لا) (مر لا) } \dots (2) \\ \text{ب} = \frac{1}{\pi} \text{ ف (ا) (جم ن لا) (مر لا) } \dots (3) \end{aligned}$$

سلسلہ کی قیمت جبکہ ہر دور $\pi = 0$ اور $\pi = \pi$ ہے

$\frac{1}{\pi} \{ \text{ف (ا) } + \text{ف (ا) } \}$
نیز دور کوئی عدد معینہ لیا جاسکتا ہے مثلاً ۲، میں لا کی بجائے صرف $\frac{\pi}{2}$ رکھ دیتا ہے۔ اگر ف $(\frac{\pi}{2})$ کی بجائے فار (π) رکھیں تو سوں کے لئے ضابطے حاصل ہوتے ہیں

$$\text{ا} = \frac{1}{\pi} \text{ ف (ا) (جم ن لا) } \dots (4)$$

$$\text{ا} = \frac{1}{\pi} \text{ ف (ا) (جم ن لا) } \dots (5)$$

اور ا اور ب کی مثل قیمتیں حاصل ہوتی ہیں۔ ضابطہ (۴) میں سمت $(-\pi)$ مضمر ہے اور (۵) سمت (π) کے لئے زیادہ موزوں ہے۔

ان ضابطوں کو حفظ یا د کرنے کی ضرورت نہیں۔ علی صورتوں میں مناسب

زاویہ ن لا یا $\frac{\pi}{2}$ کی جیب یا جیب التمام سے ضرب دیکر مناسب سمت

تخل کرنا کافی ہوگا۔ جیب کے سلسلے اور جیب التمام کے سلسلے۔ فرض کر دو دفعہ ۵ کا

جب (لا) طاق تفاعل ہے یعنی ف (لا) =۔۔ ف (لا) اس صورت میں
 ک ف (لا) جم ن لا و لا = ک ف (لا) جم ن لا و لا + ک ف (لا) جم ن لا و لا =
 پس ل =۔۔ نیز ل =۔۔ لیکن جیب کے لئے مائل ہوتا ہے

جیب = $\frac{1}{\pi}$ ک ف (لا) جیب ن لا و لا = $\frac{1}{\pi}$ ک ف (لا) جیب ن لا و لا

= $\frac{2}{\pi}$ ک ف (لا) جیب ن لا و لا (۱)

پس ف (لا) کے لئے جیب کا سلسلہ حاصل ہوتا ہے

ف (لا) = $\sum_{n=1}^{\infty} \text{جیب جیب ن لا} \dots \dots \dots (۲)$

جہاں جیب (۱) کے لئے ہے۔ سلسلہ صفر ہوتا ہے جبکہ لا =۔۔ اور
 لا = π اس لئے ان قیمتوں کے لئے یہ تفاعل کو تعبیر نہیں کرتا جب تک کہ
 ف (۰) اور ف (۲) صفر نہ ہوں۔

بخلاف اس کے فرض کرو کہ ف (لا) جفت تفاعل ہے یعنی ف (لا) = ف (لا)
 اس صورت میں جیب =۔۔ اور

ل = $\frac{1}{\pi}$ ک ف (لا) و لا (۳) ل = $\frac{2}{\pi}$ ک ف (لا) جم ن لا و لا

(۴)

اس طرح ف (لا) کے لئے عجیب تمام سلسلہ حاصل ہوتا ہے

ف (لا) = ل + $\sum_{n=1}^{\infty} \text{ل جم ن لا} \dots \dots \dots (۵)$

جہاں ل ' ل ' (۳) اور (۴) سے ملتے ہیں۔

جیب التمام سلسلہ تفاعل کو دونوں صورتوں میں تعبیر کرتا ہے جبکہ لا = اور لا = کیونکہ

$$\frac{1}{2} \{ f(0+) + f(0-) \} = \frac{1}{2} \{ f(0+) + f(0-) \} = f(0) \quad (۰)$$

$\frac{1}{2} \{ f(\pi-) + f(\pi+) \} = \frac{1}{2} \{ f(\pi-) + f(\pi+) \} = f(\pi) \quad (\pi)$
یہ دیکھنا آسان ہے کہ اوپر کے ضابطے (۱) ... (۵) کیا ہو جاتے ہیں جبکہ دور

۱۲ ہو۔
۸۲۔ عام امور کا ذکر۔ جب لا کی سمت پورا دور ۲ یا ۲ دور ہو تو
ف (لا) کے لئے ف میں سیر کا سلسلہ صرف ایک ہی ہوگا جہاں انتخاب
گزشتہ دفعات کے بموجب حاصل ہوتے ہیں۔ صورت حال اور ہو جاتی ہے
جبکہ لا کی سمت پورے دور کا صرف کوئی حصہ ہو۔ فرض کرو کہ ف (لا)
دیا گیا ہے سمت (۰، π) کے لئے تب ایک ایسا تفاعل مثلاً ف (لا) حاصل
کرنے کے لئے جو پورے دور کے لئے معلوم نہو ہم کوئی تفاعل ف (لا) سمت
(۰، π) کے لئے ایسا انتخاب کر سکتے ہیں کہ ف (لا) = ف (لا) سمت
(۰، π) تالا۔ کے لئے لیکن ف (لا) = ف (لا) سمت لا = سے لا = تاک
اب صرف ایک سلسلہ ہے جو ف (لا) کو تعبیر کریگا یہ سلسلہ ف (لا) کو تعبیر
کریگا سمت (۰، π) میں اور ف (لا) کو سمت (۰، π) میں لیکن سر دونوں
تفاعلوں ف (لا) اور ف (لا) پر منحصر ہونگے۔ پس دور کے ایک حصہ پر
تفاعل کو تعبیر کرنے کے لئے ہم سلسلوں کی کوئی سی تعداد حاصل کر سکتے ہیں لیکن
صرف جیب اور جیب التمام کے سلسلے عملی نقطہ نظر سے ضروری ہیں۔ ان دونوں
صورتوں میں ف (لا) سمت (۰، π) کے لئے معلوم ہے اور تفاعل ف (لا)

[۰ \geq لا \geq π] کی تعیین بالترتیب مساواتوں

ف (لا) = ف (لا) ف (لا) = ف (لا) سے ہوتی ہے۔
ف میں سیر کا سلسلہ بالعموم یکساں طور پر مستحق ثابت کیا گیا ہے

مسئلہ ۱ دفعہ ۲ ہم کی تھوڑی سی توسیع سے ہم دکھا سکتے ہیں کہ تفاعل کا تسلسلہ سلسلہ کو رقم برقم تکمیل کرنے سے حاصل ہو سکتا ہے۔ لیکن عام طور پر تفاعل کا مشتق ہم سلسلہ کو رقم برقم تفرق کرنے سے حاصل نہیں کرتے سلسلہ کے تفرق کے موضوع پر

[Proceedings of the Edinburgh Mathe-

matical Society \ vol 12]

کے ایک مضمون کا حوالہ دیا جاتا ہے۔ ایک اور امر کا یہاں ذکر کر دیا جائے۔ اگر ف (لا) موڑ کی قیمت کے نزدیک ہو تو ثبوت دفعہ ۸ء بلحاظ یکساں استدقاق ناقابل اطلاق معلوم دیگا۔ مگر یہ مشکل باسانی رفع ہو سکتی ہے، فرض کرو کہ ف (ج) مثلاً قیمت اعظم ہے، تو ان دو متصل اقل قیمتوں کے درمیان جن کے بیچ میں ف (ج) واقع ہوتی ہے ہم ف (لا) کو اس شکل ف (لا) + سا (لا) میں رکھ سکتے ہیں جہاں ف (لا) = ف (لا) ' سا (لا) =۔ جبکہ لا \geq ج ف (لا) = ف (ج) ' سا (لا) = ف (لا) - ف (ج) جبکہ لا \leq ج صیرجاً ف (لا) گھٹنے والا تفاعل نہیں ہے اور سا (لا) بڑھنے والا تفاعل نہیں ہے پس اوسط قیمت کا مسئلہ ہر صورت میں لگ سکتا ہے۔ پس موڑ کی قیمتوں کی وہی نوعیت ہے جو تفاعل کی عام قیمتوں کی (ملاحظہ ہو اوپر کی دفعہ جس کا ابھی حوالہ دیا گیا)۔

۸۳۔ مثالیں۔ اب ہم چند مثالیں حل کرینگے، نقاط عدم تسلسل کے لئے طالب علم ہمیشہ سلسلہ کی قیمتوں کی خاص جانچ کرے۔

مثال ۱۔ ف (لا) کے لئے جیب کا سلسلہ دریافت کرو جبکہ ف (لا) = لا، لا =۔ سے لا = $\frac{\pi}{4}$ تک اور ف (لا) = $\pi - لا$ جبکہ لا = $\frac{\pi}{4}$ سے لا = π تک۔

ف (لا) کی ترسیم ایک ٹوٹا خط مستقیم ہے۔ جسکی حاصل کر نیچے لئے

$$\frac{\pi}{4} \text{ جب } \int_0^{\pi} \text{ لا جب } \text{ لا اور } \int_0^{\pi} (\pi - لا) \text{ جب } \text{ لا اور } \frac{\pi}{4} \text{ جب } \frac{\pi}{4}$$

$$\text{اسلئے ف (لا) = } \frac{\pi}{4} \left(\text{جب } \frac{\pi}{4} \text{ جب } \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} \text{ جب } \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} \text{ جب } \frac{\pi}{4} + \dots \right)$$

ف (لا) = $\frac{۲}{۱۱}$ (جب لا جب ما + جب ۲ لا جب ما + جب ۵ لا جب ما + ...)
 مثال ۵۔ لا۔ لا۔ لا کے لئے لا = ۳ سے لا = ۱ تک جیب تمام کا
 سلسلہ دریافت کرو۔

اس صورت میں سلسلہ کی شکل یہ ہے

$$\text{لا۔ لا} = \text{لا} = \text{ا} + \text{ح} \text{ ان جم } \frac{۱۱}{۲} \text{ لا}$$

سے ۱ تک تکمل کرو تب ا = $\frac{۱}{۲}$

جم $\frac{۱۱}{۲}$ لا کے ساتھ ضرب دو اور۔ سے ۱ تک تکمل کرو تب

$$\text{ا} = ۲ - (۱ + \text{جم } ۱۱) \text{ لا} / ۱۱$$

اس لئے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\text{لا۔ لا} = \frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۲۲} \left(\frac{۱}{۲} \text{ جم } \frac{۱۱}{۲} + \frac{۱}{۲} \text{ جم } \frac{۱۱}{۲} + \dots \right)$$

یہ پھیلاؤ جائز ہے۔ $\frac{۱}{۲} \geq \text{لا} \geq \frac{۱}{۲۲}$ کے لئے است۔ $\frac{۱}{۲} \geq \text{لا} \geq \frac{۱}{۲۲}$ ۔

کے لئے سلسلہ۔ لا۔ لا کو تبخیر کرتا ہے۔
 رکھو لا = ۲ ج اور ہر رکن سے ج^۲ تفویق کرو۔ اس طرح حاصل ہوتا ہے

$$\text{ج۔ لا} = \frac{۲}{۳} + \frac{۲}{۳۳} \left(\text{جم } \frac{۱۱}{۳} + \frac{۱}{۳۳} \text{ جم } \frac{۱۱}{۳} + \frac{۱}{۳۳} \text{ جم } \frac{۱۱}{۳} + \dots \right)$$

جائز ہے۔ $\frac{۲}{۳} \geq \text{لا} \geq \frac{۲}{۳۳}$ کے لئے۔

۸۴۔ چند معیاری سلسلے۔ اب ہم چند مشہور پھیلاؤ حاصل کریں گے
 انہیں بالعموم بلو واسطہ اعمال سے ثابت کیا جاتا ہے تاہم مضمون زیر بحث کی

ان سے دلچسپ توضیح ہوتی ہے۔
مثال ۱۔ جنم پ لا کے لئے ایک جیب التمام سلسلہ حاصل کر دو جہاں
پ نہ تو صفر ہے اور نہ ہی یہ صحیح عدد ہے۔

$$1 = \frac{\text{جب پ}}{\pi} \quad 1 = \frac{1 - \frac{1}{\pi}}{(1 - \frac{1}{\pi})} = \frac{1 - \frac{1}{\pi}}{1 - \frac{1}{\pi}}$$

$$\text{جنم پ لا} = \frac{\text{جب پ}}{\pi} + \frac{1 - \frac{1}{\pi}}{(1 - \frac{1}{\pi})} = \frac{1 - \frac{1}{\pi}}{1 - \frac{1}{\pi}} \quad (1) \dots$$

یہ پھیلاؤ درست ہے۔ $\pi \geq 1$ کے لئے، لیکن چونکہ جنم پ لا جفت
تفاعل ہے، اس لئے یہ پھیلاؤ سخت $\pi \geq 1$ کے لئے بھی جائز ہے۔
(۱) میں رکھو لا = ۰، اور ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{جب پ}}{\pi} = \frac{1}{\pi} + \frac{1 - \frac{1}{\pi}}{(1 - \frac{1}{\pi})} = \frac{1}{\pi} + \frac{1 - \frac{1}{\pi}}{1 - \frac{1}{\pi}}$$

$$= \frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi} = \frac{2}{\pi} \quad (2) \dots$$

(۲) میں پ π کی بجائے π رکھو تب ہی صفر نہیں ہے اور نہ ہی یہ
 π کا ضعف ہے۔ اس طرح

$$\frac{1}{\pi} = \frac{1}{\pi} + \frac{1 - \frac{1}{\pi}}{(1 - \frac{1}{\pi})} = \frac{1}{\pi} + \frac{1 - \frac{1}{\pi}}{1 - \frac{1}{\pi}}$$

$$= \frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi} = \frac{2}{\pi} \quad (3) \dots$$

(۳) میں رکھو π کی بجائے π ۔ تب اگر π کا طاق ضعف
نہ ہو تو لگا

$$\frac{1}{\pi} = \frac{1}{\pi} + \frac{1 - \frac{1}{\pi}}{(1 - \frac{1}{\pi})} = \frac{1}{\pi} + \frac{1 - \frac{1}{\pi}}{1 - \frac{1}{\pi}} \quad (4) \dots$$

اب ہم (۱) کو اس شکل میں لکھ سکتے ہیں

$$\text{لوک} \frac{\pi}{\pi} = \frac{\pi}{\pi} - \frac{\pi}{\pi} + \frac{\pi}{\pi} - \frac{\pi}{\pi} + \dots$$

اور لوکارتموں سے عددوں کی طرف گزرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{جب } \pi = \frac{\pi}{\pi} - \left(\frac{\pi}{\pi} - \frac{\pi}{\pi} \right) + \left(\frac{\pi}{\pi} - \frac{\pi}{\pi} \right) - \dots (۸)$$

جب 'ن' لانتناہی کی طرف مائل ہوتا ہے تو جزو ضربی کو ایک کی طرف

مستحق ہوتا ہے۔

اسطور پر ہمیں جب 'لا' کے لئے لانتناہی حاصل ضرب حاصل ہوتا ہے

$$\text{جب } \pi = \frac{\pi}{\pi} - \left(\frac{\pi}{\pi} - \frac{\pi}{\pi} \right) + \left(\frac{\pi}{\pi} - \frac{\pi}{\pi} \right) - \dots (۹)$$

اسی طرح (۹) سے جم 'لا' کے لئے لانتناہی حاصل ضرب حاصل ہوتا ہے

$$\text{جم } \pi = \frac{\pi}{\pi} - \left(\frac{\pi}{\pi} - \frac{\pi}{\pi} \right) + \left(\frac{\pi}{\pi} - \frac{\pi}{\pi} \right) - \dots (۱۰)$$

ضابطے (۹) اور (۱۰) کی ہر قسیدت کے لئے جائز ہیں اگرچہ ثبوت سے یہ ظاہر نہیں ہوتا۔

مثال ۲ - $\frac{1}{\pi} = \frac{\pi}{\pi} - \frac{\pi}{\pi} + \frac{\pi}{\pi} - \frac{\pi}{\pi} + \dots$ یا جم 'لا' کے لئے 'جیب' التمام سلسلہ حاصل کرو۔

$$\frac{\pi}{\pi} = \frac{\pi}{\pi} - \frac{\pi}{\pi} + \frac{\pi}{\pi} - \frac{\pi}{\pi} + \dots$$

اس لئے $\pi \geq \pi \geq \pi$

$$\text{جم } \pi = \frac{\pi}{\pi} - \left(\frac{\pi}{\pi} - \frac{\pi}{\pi} \right) + \left(\frac{\pi}{\pi} - \frac{\pi}{\pi} \right) - \dots (۱)$$

(۱) میں رکھو 'لا' = 'تا' تب

$$(۲) \dots\dots\dots \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1} + \frac{1}{1} = \frac{\pi}{2}$$

جب $n=1$ کے لئے 1 رکھو، تب اگر y صفر نہ ہو تو

$$(۲) \dots\dots\dots \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + y^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{y^2}$$

(۱) میں رکھو $y=1$

$$(۴) \dots\dots\dots \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1} + \frac{1}{1} = \frac{\pi}{2}$$

(۴) میں $n=1$ کے لئے y رکھو، تب y کے صفر نہ ہونے کی صورت میں

$$(۵) \dots\dots\dots \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + y^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{y^2}$$

نیز $\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{y^2} = \frac{1}{y^2}$ اس لئے (۴) اور (۲) سے

$$(۶) \dots\dots\dots \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1} = \frac{\pi^2}{6}$$

یا $n=1$ رکھنے سے

$$(۷) \dots\dots\dots \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + y^2} = \frac{1}{y^2}$$

مثال کی طرح ہم آسانی لا متناہی حاصل ضرب کے ضابطے حاصل کر سکتے ہیں

$$\dots\dots\dots \left(\frac{1}{1^2} + 1 \right) \left(\frac{1}{2^2} + 1 \right) \left(\frac{1}{3^2} + 1 \right) \dots\dots\dots$$

$$\dots\dots\dots \left(\frac{1}{1^2} + 1 \right) \left(\frac{1}{2^2} + 1 \right) \left(\frac{1}{3^2} + 1 \right) \dots\dots\dots$$

۸۵۔ فوری کا دواہر تکملہ - دفعہ ۸ میں فرض کرو کہ $y=1$

ایک ایسا تفاعل فن (۱+۰) ہے جو دفعہ ۲ کے شرائط کو پورا کرتا ہے اس صورت میں دفعہ ۱ کے تنکلمہ (۱) کی اوپر کی حد $\frac{1}{2}$ (۱-۰) کی بجائے ہم کوئی عدد بے لے سکتے ہیں جو ۱ سے بڑا ہو۔ اس طرح ہمیں ذیل کا نتیجہ حاصل ہوتا ہے

$$\text{نہا } \left\{ \begin{array}{l} \text{ف (۱+۰) جب } \frac{1}{2} \text{ و } ۰ = ۰ \\ \text{اگر } ۰ < ۱ < ۰ \end{array} \right. \quad (۱)$$

اسی طرح دفعہ ۱ کے (۱) کے مائل ذیل کا نتیجہ ہے

$$\text{نہا } \left\{ \begin{array}{l} \text{ف (۱-۰) جب } \frac{1}{2} \text{ فر } ۰ = ۰ \\ \text{اگر } ۰ < ۱ < ۰ \end{array} \right. \quad (۲)$$

(۲) میں فرض کر دے $۰ = ۰$ و $۱ = ۱$ ب = ۱ یعنی ۱ اور ب منفی ہیں اور اوجہ طور پر ب سے کم ہے تب ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\text{نہا } \left\{ \begin{array}{l} \text{ف (۱+۰) جب } \frac{1}{2} \text{ و } ۰ = ۰ \\ \text{اگر } ۰ > ۱ > ۰ \end{array} \right. \quad (۳)$$

(۱) اور (۳) کو ایک ضابطہ میں اکٹھا کیا جاسکتا ہے یعنی

$$\text{نہا } \frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{l} \text{ف (۱+۰) جب } \frac{1}{2} \text{ و } ۰ = ۰ \\ \text{اگر } ۰ > ۱ > ۰ \end{array} \right. \quad (۴)$$

سادہ ہے $\frac{1}{2} \left\{ \text{ف (۱+۰) + ف (۱-۰) \right\}$ کے اگر $۰ < ۱ < ۰$

سادہ ہے $\frac{1}{2} \text{ ف (۱+۰)}$ کے اگر $۰ < ۱ < ۰$

سادہ ہے $\frac{1}{2} \text{ ف (۱-۰)}$ کے اگر $۰ > ۱ > ۰$

سادہ ہے صفر کے اگر $۰ < ۱ < ۰$

یا اگر ۱۰ بجائے
اگر تکملہ (۴) میں ب مثبت ہو اور منفی تو انتہا بدلنے کے بغیر ہم ب کی بجائے
کوئی اس سے بڑا عدد ب اور کوئی بجائے کوئی (جس پر یہ طور پر اس سے چھوٹا عدد لکھ لیتے ہیں
کیونکہ مذکورہ انتہا صفر ہوتی ہے جب تک تکملہ کے حدود ب ب ہوں یا ۱۰۔
اگر یہ مان لیا جائے کہ تکملہ کے اوپر کی حد + ∞ تک اور نیچے کی - ∞ تک مت
دیکر بجائی جاسکتی ہے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\text{نیا } \frac{1}{\infty} = \frac{1}{\infty} \text{ ف (لا + و) جب } \frac{1}{\infty} = \frac{1}{\infty} \text{ ف (لا + و) + ف (لا - و)} \quad \text{یا لا + و کی بجائے عدا درج کرنے سے}$$

$$\text{نیا } \frac{1}{\infty} = \frac{1}{\infty} \text{ ف (عدا) جب } \frac{1}{\infty} = \frac{1}{\infty} \text{ ف (عدا) - عدا - لا}$$

$$= \frac{1}{\infty} \text{ ف (لا + و) + ف (لا - و) } \dots \dots (۵)$$

$$\text{لیکن جب } \frac{1}{\infty} = \frac{1}{\infty} \text{ ف (عدا - لا) = ف (جم ببا (عدا - لا) فربا}$$

اس لئے (۵) میں مندرج کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{1}{\infty} \text{ ف (لا + و) + ف (لا - و) } = \frac{1}{\infty} \text{ ف (عدا) فربا (جم ببا (عدا - لا) فربا}$$

$$= \frac{1}{\infty} \text{ فربا } \frac{1}{\infty} \text{ ف (عدا) جم ببا (عدا - لا) فربا}$$

$$= \frac{1}{\infty} \text{ فربا } \frac{1}{\infty} \text{ ف (عدا) جم ببا (عدا - لا) فربا } \dots \dots (۶)$$

بشرطیکہ مختلف استعمالات جائز ہوں۔ جو ازیر بحث کرنے کی یہاں گنجائش نہیں
لیکن طالب علم کے لئے یہ ثابت کرنے میں زیادہ دقت نہیں ہوگی کہ ضابطہ
(۶) درست رہتا ہے اگر ان قیود کے علاوہ جو اس سے قبل ف (لا) پر
لگائی گئی ہیں تفاعل ایسا ہو کہ تکملہ

ف (لا) فر لا

مطلق طور پرستحق ہو جیسے لا' یا - ∞ کی طرف اُل ہو۔
تکملہ (۶) فورے کا دودھ ہر تکملہ کہلاتا ہے جب 'ف (لا) مسلسل ہو تو
تکملہ کی قیمت ف (لا) ہوتی ہے۔
ذیل کی خاص صورتیں آسانی سے حاصل ہوتی ہیں۔
اگر ف (لا) = ف (لا) تو لا < کی صورت میں

ف (لا) = $\frac{۲}{۳}$ جب لا بہ فر بہ آ ف (ع) جب ع بہ فر ع... (۷)
لیکن اگر ف (لا) = ف (لا) تو لا > کی صورت میں

ف (لا) = $\frac{۲}{۳}$ جب لا بہ فر بہ آ ف (ع) جم ع بہ فر ع... (۸)
نقطہ عدم تسلسل پر قیمت کے مطلق حسب معمول قرار داد کے موافق۔

مثال۔ مساوات جف و = کہ جف و کا ایک ایسا حل معلوم
کر دو جو جائز ہوتے۔ لا < کے لئے اور ایسا کہ و = جبکہ لا =۔ اور

و = ف (لا) جبکہ لا <۔
اس کی آسانی سے تصدیق ہو سکتی ہے کہ و = تو کہ بہات جب لا بہا

تفرقی مساوات کو پورا کرتا ہے خواہ بہا کی کچھ ہی قیمت ہو نیز اس شکل
ح (و) بہا کا متفاعل کا ہر جملہ مساوات کو پورا کرے گا۔

پس یہ معلوم ہو گا کہ
و = $\frac{۲}{۳}$ کہ بہات جب لا بہ فر بہ آ ف (ع) جب ع بہ فر ع

تمام شرائط کو پورا کرتا ہے۔ یہ مساوات کو پورا کرتا ہے کیونکہ یہ اس شکل

حج (فہم) x بہا کا تفاعل (کلپ) یہ نیکلہ صفر ہے، جبکہ $\lambda = 10$ اور نیکلہ سادی ہے
ف (لا) کے جبکہ $t = 0$ ، لا ∞ ۔ اوپر کی مساوات (۷) کی رو سے۔

۸۶۔ آزمائشی تفاعل۔ علی صورتوں میں یہ سوال اکثر واقع ہوتا ہے

کہ کسی آزمائشی یا تجرباتی تفاعل کو فنی سرشیر کے سلسلہ سے تعبیر کیا جائے۔
طالب علم کو اگر اس کے حل کا موقع پیش آئے تو ترسیمی حل کا خاکہ اسے مصنف
کی کتاب انٹریسٹ کا رسالہ (Treatise on Graphs)

صفحات ۱۳۹-۱۴۲ اور تخلیقی حل مصنف کی کتاب تفہید احصا
(Introduction to the Calculus) صفحات ۱۳۰ تا ۱۳۴ میں ملے گا۔
تخلیقی طریق کی مفصل بحث کے لئے ملاحظہ ہوں پر دفسیری انگ (C. Runge)
کے مضامین

(Zeitschrift für Mathematik und Physik)

جلد ۴۴ صفحات ۴۴۳ تا ۴۵۱ اور جلد ۵۲ صفحات ۱۱۰ تا ۱۲۳ میں، نیز
(Elektrotechnische Zeitschrift 1905 (Heft 11)) میں۔

۸۷۔ حوالے۔ فوریر کے سلسلوں کا علم بہت وسیع ہے، زیادہ مشہور
مکتوبات کا مختصر بیان

(Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society Vol 1)

کے ایک مضمون میں ملیگا۔ مگر طالب علم خود فنی سرشیر کا وقت غیر رسالہ
(Théorie Analytique de la Chaleur)

(Edited by G. Darboux. paris: Gauthier-villars)

اس کا انگریزی ترجمہ اے، فری مین (کیرج) یونیورسٹی پریس نے
کیا ہے۔ اس مضمون پر ایک نہایت عمدہ کتاب ڈبلیو ایچ، بالٹرے
کی ہے (بوسٹن، یو، ایس، اے۔ جن مینی)۔

An Elementary Treatise on Fourier Series and
Spherical, Cylindrical and Ellipsoidal Harmonics

فرئے کے سلسلہ کو تفرق کرنے سے حاصل ہو سکتا ہے

۱۲۔ فو کے (۱) جیب التام سلسلہ (۲) جیب سلسلہ حاصل کرو۔ اس کا معائنہ کرو کہ کیا ہر ایک سلسلہ دوسرے سلسلہ سے تفرق یا مکمل سے حاصل ہو سکتا ہے یا نہیں۔
۱۳۔ اگر ف (لا) کا جفت تفاعل ہو تو ثابت کرو کہ ف (لا) پر بعض قیود کے ماتحت

$$\begin{aligned} & \text{ف (لا)} + \text{ف (لا ۲)} + \text{ف (لا ۴)} + \dots \\ & + \text{ف (لا ۲)} + \text{ف (لا ۴)} + \dots \\ & \text{یعنی } \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{ف (لا ۲}^n) \end{aligned}$$

ایک سلسلہ !+ جی جی جم $\frac{n}{\omega}$ سے تعبیر ہو سکتا ہے جہاں

$$!+ = \frac{1}{\omega} \quad \text{ف (ع) درء' ل} = \frac{2}{\omega} \quad \text{ف (ع) جم} = \frac{n}{\omega}$$

[ملاحظہ ہوں جوابات]
۱۴۔ مثال ۱۳ کے مسئلہ کے ذریعہ ثابت کرو کہ

$$\begin{aligned} (۱) \quad & \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{فو} = \frac{(\text{ج. ج.})}{\omega^2} = \frac{(\text{ج. ج.})}{\omega^2} \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{فو} \right\} = \frac{(\text{ج. ج.})}{\omega^2} \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{فو} \right\} \\ (۲) \quad & \sum_{n=-\infty}^{\infty} (۱-n) \text{فو} = \frac{(\text{ج. ج.})}{\omega} = \frac{(\text{ج. ج.})}{\omega} \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{فو} \right\} = \frac{(\text{ج. ج.})}{\omega} \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{فو} \right\} \end{aligned}$$

۱۵۔ اگر ف (لا) دوری تفاعل ہو جس کا دور π ہو تو ثابت کرو کہ

$$\text{جم لا بہا ربہا} = \frac{\pi}{\pi^2} \text{ تو لا}^1 \text{ لا} \leq .$$

۱۹۔ دفعہ ۸۵ کے مکملوں (۷)، (۸) کے ذریعہ ثابت کرو کہ

$$\text{جم لا} \text{ مر لا} = \frac{\pi}{2} = \text{جم لا} \text{ مر لا}$$

$$\text{فرض کرو [ف (ع) = } \frac{1}{\text{ع}}]$$

۲۰۔ اگر $\text{جم لا ع (ع) = } \frac{\pi}{2} \text{ ف (لا)}$

تب $\text{جم لا ع (ع) = } \frac{\pi}{2} \text{ ف (لا)}$
 اس کے مائل اور رشتہ ہو گا جبکہ مکمل میں جم لا ع کی بجائے
 جب لا ع ہو۔

۲۱۔ اگر $n < 1$ اور $n \leq 1$ یا اگر $n = 1$ اور $n < 1$ ۔
 تو ثابت کرو کہ

(۱) $\text{جم ن طہ جب (لا س طہ) = } \frac{\pi}{\pi^2} \text{ جم طہ فرطہ} = \frac{\pi}{\pi^2} \text{ قول}^1 \text{ لا}^1$

(۲) $\text{جم ن طہ جب (لا س طہ) = } \frac{\pi}{\pi^2} \text{ جم طہ فرطہ} = \frac{\pi}{\pi^2} \text{ قول}^1 \text{ لا}^1$

دفعہ ۷۲ مثال ۷ اور دفعہ ۸۵ نتائج (۷)، (۸) استعمال کرو۔
 ۲۲۔ مثال ۲۱ کے نتیجے استعمال کر کے ثابت کرو کہ اگر $n < 1$ تو

(۱) $\text{جم م طہ جب ن طہ جب}^1 \text{ جم}^1 \text{ طہ فرطہ} = \frac{\pi}{\pi^2} \text{ جم}^1 \text{ (م) جم}^1 \text{ (ن) (۱-ن+م)}$

(۲) $\text{جم م طہ جب ن طہ جب}^1 \text{ جم}^1 \text{ طہ فرطہ} = \frac{\pi}{\pi^2} \text{ جم}^1 \text{ (م) جم}^1 \text{ (ن) (۱-ن+م)}$

۲۵۔ ف (لا) پر انہی قیود کے ہوتے ہوئے جو ف (لا) پر عامہ کی گئی ہیں ثابت کرو کہ اگر $\pi > \lambda > \pi$

$$\int_{\pi}^{\pi} \frac{(1-\lambda) f(\lambda) d\lambda}{\pi - (1-\lambda) f(\lambda)} = \pi \{ f(\lambda) + f(\lambda) \}$$

$$\int_{\pi}^{\pi} \frac{f(\lambda) d\lambda}{\pi - (1-\lambda) f(\lambda)} = \pi \{ f(\lambda) + f(\lambda) \}$$

جہاں صہ مثبت قیمتوں میں سے ہو کر صفر کی طرف مستقیم ہوتا ہے۔
[ملاحظہ ہو مشق ۱۲ (۱۳)]



ضمیمہ تفرقوں پر نوٹ

دفعہ ۹۰ حصہ اول میں دو یا زیادہ متبوع متغیروں کے تفاعل کے تفرقہ فرع کی یہ تعریف کی گئی ہے کہ یہ مفہوم کا صد ری حصہ ہے، تین غیر تابع متغیروں (لا، ما، می) کے لئے مساوات ہے

$$\text{فرع} = \frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}} + \frac{\text{جف ع}}{\text{جف ما}} + \frac{\text{جف ع}}{\text{جف می}} \text{ فری} \dots\dots\dots (۱)$$

یہ دیکھنا ضروری ہے کہ اس صورت میں بھی فرع مساوات (۱) سے تعبیر ہوگا جبکہ متغیر (لا، ما، می) غیر تابع ہونے کی بجائے دو یا زیادہ غیر تابع متغیروں کے تفاعل میں تمام تفاعل اور ان کے پہلے جزوی شقوق کو مسلسل فرس کیا گیا ہے۔

فرس کر دو کہ (لا، ما، می) دو غیر تابع متغیروں میں 'ت' کے تفاعل ہیں، اس لئے 'ع' غیر تابع متغیروں میں 'ت' کا تفاعل ہے اور 'ع' کا تفرقہ ذیل کی مساوات سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{فرع} = \frac{\text{جف ع}}{\text{جف س}} + \frac{\text{جف ع}}{\text{جف ت}} \text{ فرت} \dots\dots\dots (۲)$$

اب (لا، ما، می) غیر تابع متغیروں میں 'ت' کے تفاعل ہیں، اس لئے ان کے تفرقہ ذیل کی مساواتوں سے حاصل ہوتے ہیں۔

$$\text{فر لا} = \frac{\text{جف لا}}{\text{جف س}} + \frac{\text{جف لا}}{\text{جف ت}} \text{ فرت}$$

$$\text{فر ما} = \frac{\text{جف ما}}{\text{جف س}} + \frac{\text{جف ما}}{\text{جف ت}} \text{ فرت} \dots\dots\dots (۳)$$

$$\text{فر می} = \frac{\text{جف می}}{\text{جف س}} + \frac{\text{جف می}}{\text{جف ت}} \text{ فرت}$$

لیکن دفعہ ۹۰ حصہ اول کی مساواتوں (ب) سے

جف ۶ جف ۶ جف لا + جف ۶ جف ما + جف ۶ جف ی
 جف س جف لا جف س جف ما جف س جف ی جف س
 جف ۶ جف ۶ جف لا + جف ۶ جف ما + جف ۶ جف ی
 جف ت جف لا جف ت جف ما جف ت جف ی جف ت
 فرع کی بجائے ترقیم جف ۶ کے استعمال کے متعلق ملاحظہ ہو صفحہ ۳۵۹

حصہ اول کے وسط میں اس امر کا ذکر۔

پہلی سادات کو فرس کے ساتھ دوسری کو فرت کے ساتھ ضرب دینے اور جمع کرنے سے ماہل ہوتا ہے

جف ۶ فرس + جف ۶ فرت = جف ۶ (جف لا فرس + جف لا فرت)
 جف س فرس + جف ت فرت = جف لا (جف س فرس + جف ت فرت)
 جف ۶ (جف ما فرس + جف ما فرت) + جف ۶ (جف ی فرس + جف ی فرت) = جف ما (جف س فرس + جف ت فرت) + جف ی (جف س فرس + جف ت فرت)

جف ۶ فر لا + جف ۶ فر ما + جف ۶ فر ی (۴)

ساداتوں (۳) کو استعمال کرنے سے۔

ساداتوں (۲) اور (۴) کا مقابلہ کرنے سے ہم دیکھتے ہیں کہ

فر ۶ = جف ۶ فر لا + جف ۶ فر ما + جف ۶ فر ی

پس معلوم ہوا کہ فرع کے لئے جملہ 'فر لا' 'فر ما' 'فر ی' کی رقوم میں اسی شکل کا ہے جیسا کہ 'لا' 'ما' 'ی' کے غیر تابع ہونے کی صورت میں ظاہر ہے کہ ثبوت قائم رہتا ہے خواہ کسی ایک جٹ 'لا' 'ما' 'ی' یا 'س' 'ت' کے متغیروں کی تعداد کچھ ہی ہو۔

دفعہ ۹۸ حصہ اول میں ایک غیر تابع متغیر لا کے تفاعل ما یا ف (لا) کی تعریف ف (لا) فر لا کی گئی ہے اس صورت میں فر لا صفر ہے یا

فرلا مستقل ہے، لیکن اگر ایک اور متغیر مثلاً 'ت' متغیر متبوع ہو یعنی 'ما' لا کا
تفاعل ہو جبکہ 'لا' 'ت' کا تفاعل ہو تو 'لا' صفر نہیں ہوگا بلکہ
فرلا = لا = لا فرت ' فرما = ما فرت

جہاں نقطوں سے تفرق بلحاظ 'ت' کے تعبیر ہوتا ہے۔

لیکن 'ما' = ف (لا) (لا) + ف (لا) لا
پس 'ما' فرت = ف (لا) (لا) + ف (لا) لا فرت

یا فرما = ف (لا) (لا) + ف (لا) لا فرلا (۵)

پس فرما کے لئے جو جملہ ہے اس کی شکل اب وہی نہیں ہے جو کہ لا کے متغیر
متبوع ہونے کی صورت میں تھی۔

فرما کی قیمت ف (لا) لا کا تفرقہ لینے سے (۵) حاصل ہو سکتی ہے پس

فرما = فر (فرما) = فرلا x فرت (لا) + ف (لا) x فر (لا)

= فرلا x ف (لا) فرلا + ف (لا) لا فرلا

= ف (لا) لا فرلا + ف (لا) لا فرلا

اسی طرح حاصل ہوتا ہے

رما = مر (رما) = ف (لا) لا فرلا + ف (لا) لا فرلا + ف (لا) لا فرلا

دوسرے اور تیسرے تفرقوں کے لئے یہ جملے تحلیلی ہندسہ میں اکثر مطلوب ہوتے ہیں۔
دو یا زیادہ غیر تابع متغیروں کے تفاعل کے اعلیٰ تفرقے ذرا پیچیدہ ہیں۔ اگر

مر = $\frac{\text{جف}^{\text{ع}}}{\text{جف}^{\text{ع}} \text{ لا}} \text{ لا} + \frac{\text{جف}^{\text{ع}}}{\text{جف}^{\text{ع}} \text{ ما}} \text{ رما}$

تو رء = فر (فرء) = $\frac{\text{جف}^{\text{ع}}}{\text{جف}^{\text{ع}} \text{ لا}} \text{ لا} + \frac{\text{جف}^{\text{ع}}}{\text{جف}^{\text{ع}} \text{ ما}} \text{ رما}$

= $\frac{\text{جف}^{\text{ع}}}{\text{جف}^{\text{ع}} \text{ لا}} \text{ لا} + \frac{\text{جف}^{\text{ع}}}{\text{جف}^{\text{ع}} \text{ لا}} \text{ فرما} + \frac{\text{جف}^{\text{ع}}}{\text{جف}^{\text{ع}} \text{ ما}} \text{ رما} + \frac{\text{جف}^{\text{ع}}}{\text{جف}^{\text{ع}} \text{ ما}} \text{ فرما}$

= $\frac{\text{جف}^{\text{ع}}}{\text{جف}^{\text{ع}} \text{ لا}} \text{ لا} + \frac{\text{جف}^{\text{ع}}}{\text{جف}^{\text{ع}} \text{ لا}} \text{ فرلا} + \frac{\text{جف}^{\text{ع}}}{\text{جف}^{\text{ع}} \text{ ما}} \text{ رما} + \frac{\text{جف}^{\text{ع}}}{\text{جف}^{\text{ع}} \text{ ما}} \text{ فرما} \dots (۶)$

اگر سادات (۱۱) دفعہ ۴۸ میں ہ، گ، ل کی بجائے بالترتیب فلا، فرما، فری رکھا جائے اور ف (لا+ہ، ما+گ، ہی+ل)۔ ف (لا، ما، ہی) کی بجائے مف ف تو وہ سادات یوں لکھی جاسکتے گی

مف ف = رف + ۱/۴ رف + ۱/۳ رف + + ۱/۳۰ رف

اگر لا، ما، ہی غیر تابع متغیر نہ ہوں تو فرلا، فرما، فری مستقل نہیں ہیں اور فرع کے لئے جو جملہ ہوگا اُس کی شکل مندرجہ بالا سے مختلف ہوگی۔ (۶) کے بائیں جانب جو رقمیں ہیں ان میں ذیل کے جملہ کا اضافہ کرنا ہوگا

$$\frac{\text{جف ع}}{\text{جف لا}} + \frac{\text{جف ع}}{\text{جف ما}} + \frac{\text{جف ع}}{\text{جف ل}}$$



جوابات

(احصا حصہ دوم)

باب اول

دفعہ ۲، صفحہ ۷

$$۱- \frac{۲}{۳} لا^۴، \frac{۲}{۳} لا^۳، \frac{۲}{۳} لا^۲، \frac{۲}{۳} لا، \frac{۲}{۳} لا^۰، \frac{۲}{۳} لا^{-۱}، \frac{۲}{۳} لا^{-۲}، \frac{۲}{۳} لا^{-۳}، \frac{۲}{۳} لا^{-۴}$$

$$۲- \frac{۲}{۳} لا^۴، \frac{۲}{۳} لا^۳، \frac{۲}{۳} لا^۲، \frac{۲}{۳} لا، \frac{۲}{۳} لا^۰، \frac{۲}{۳} لا^{-۱}، \frac{۲}{۳} لا^{-۲}، \frac{۲}{۳} لا^{-۳}، \frac{۲}{۳} لا^{-۴}$$

مشق صفحہ ۱۱

$$۱- \frac{۳}{۴} لا^۵ + \frac{۵}{۴} لا^۴ + \frac{۱۴}{۴} لا^۳ + \frac{۱۵}{۴} لا^۲ + \frac{۱۰}{۴} لا + \frac{۳}{۴} لا^۰$$

$$۲- \frac{۳}{۴} لا^۵ + \frac{۵}{۴} لا^۴ + \frac{۱۴}{۴} لا^۳ + \frac{۱۵}{۴} لا^۲ + \frac{۱۰}{۴} لا + \frac{۳}{۴} لا^۰$$

$$۳- \frac{۳}{۴} لا^۵ + \frac{۵}{۴} لا^۴ + \frac{۱۴}{۴} لا^۳ + \frac{۱۵}{۴} لا^۲ + \frac{۱۰}{۴} لا + \frac{۳}{۴} لا^۰$$

$$۴- \frac{۳}{۴} لا^۵ + \frac{۵}{۴} لا^۴ + \frac{۱۴}{۴} لا^۳ + \frac{۱۵}{۴} لا^۲ + \frac{۱۰}{۴} لا + \frac{۳}{۴} لا^۰$$

$$۵- \frac{۳}{۴} لا^۵ + \frac{۵}{۴} لا^۴ + \frac{۱۴}{۴} لا^۳ + \frac{۱۵}{۴} لا^۲ + \frac{۱۰}{۴} لا + \frac{۳}{۴} لا^۰$$

$$۶- \frac{۳}{۴} لا^۵ + \frac{۵}{۴} لا^۴ + \frac{۱۴}{۴} لا^۳ + \frac{۱۵}{۴} لا^۲ + \frac{۱۰}{۴} لا + \frac{۳}{۴} لا^۰$$

$$۷- \frac{۳}{۴} لا^۵ + \frac{۵}{۴} لا^۴ + \frac{۱۴}{۴} لا^۳ + \frac{۱۵}{۴} لا^۲ + \frac{۱۰}{۴} لا + \frac{۳}{۴} لا^۰$$

$$۱۴ - \frac{1}{4} \text{ جم } (۱ + لا) - \frac{1}{۱۴} \text{ جم } (۵ + لا)$$

$$۱۵ - \frac{1}{۴} لا + \frac{1}{۸} \text{ جب } ۲ لا + \frac{1}{۱۶} \text{ جب } ۴ لا + \frac{1}{۳۲} \text{ جب } ۶ لا$$

$$۱۶ - \frac{۲}{۴} - ۱۷ - \frac{۲}{۸} - ۱۸ - \frac{۲}{۴} - ۱۹ - \frac{1}{۴} \text{ لوک } ۲$$

$$۲۰ - \frac{1}{۴} \text{ لوک } (\frac{۳}{۵}) - ۲۱ - \frac{۲}{۶} - ۲۲ - \frac{۲}{۶} - ۲۸ - \frac{۲۴}{۳} \text{ جب } ۲۴$$

مشق ۲ صفحہ ۲۵

$$۱ - \frac{۲}{۲۳۶} \text{ سن } (\frac{۳ + لا}{۲۳۶}) - ۲ - \text{ جب } (\frac{۱ - لا}{۲})$$

$$۳ - \text{ لوک } [لا + \frac{1}{۶} + \frac{۱}{۶} لا] - ۴ - \text{ جب } (\frac{ب - لا - ۱}{ب - ۱})$$

$$۵ - \frac{1}{۶} \text{ لوک } (۳ + لا) - ۶ - لا + لا$$

$$۷ - \frac{1}{۶} \text{ لوک } (\frac{لا - ۱}{لا + ۱}) - ۸ - \frac{1}{۳۶} \text{ سن } (\frac{۱ + لا}{۳۶})$$

$$۹ - لا + لا - ۲ - ۱۰ - \text{ لوک جب } لا - ۱۱ - \text{ لوک } (۱ + جب لا)$$

$$۱۲ - \text{ لوک } (لا + جب لا) - ۱۳ - \frac{1}{۳} \text{ سن } لا - لا + لا$$

$$۱۴ - \frac{1}{۴} \text{ مم } لا + \frac{1}{۶} \text{ مم } لا + \text{ لوک جب } لا$$

$$۱۵ - \frac{1}{ب} \text{ سن } (\frac{ب}{ب} \text{ سر } لا)$$

$$۱۶ - \text{ جم } لا + \text{ جم } لا - \frac{۳}{۵} \text{ جم } لا + \frac{1}{۴} \text{ جم } لا$$

$$۱۷ - \frac{1}{5} \text{ جم لا} + \frac{2}{2} \text{ جم لا} - \frac{1}{9} \text{ جم لا} = ۱۸ - \text{مس لا مم لا}$$

$$۱۹ - \frac{1}{7} \text{ قط لا} - ۲۰ - ۲ \sqrt{۱-لا} \left\{ \frac{1}{5} (۱-لا) - \frac{1}{3} (۱-لا) \right\}$$

$$۲۱ - \frac{2}{3} (لا+۲\sqrt{۱-لا}) - ۲۲ - \text{لوک} (لا+۱-۱) - \frac{2}{3} \text{ سن} \left(\frac{۱+لا}{3} \right)$$

$$۲۳ - (۱) \frac{1}{15} (۲) \frac{1}{15} (۳) \frac{\pi}{2} (۴) \frac{1}{3} \text{ لوک } ۳$$

$$(۵) \frac{1}{4} \text{ لوک } ۲ (۶) \frac{\pi}{3} (۷) \frac{\pi}{3} (۸) \frac{\pi}{2}$$

$$۲۴ - \frac{1}{4} \text{ لوک} (لا+۱+۱) + \frac{1}{3} \text{ سن} \left(\frac{۱+لا}{3} \right)$$

$$۲۵ - لا - ۲ \text{ سن لا} - ۲۶ - \frac{1}{3} (۱-لا) + ۲ \text{ لوک} (لا+۲+۳)$$

$$۲۷ - \frac{3}{2} \text{ لوک} (لا-۲) + \frac{1}{2} \text{ لوک} (لا+۲)$$

$$۲۸ - لا+۲ \text{ لوک} (۱-لا) - \frac{2}{1-لا} - ۲۹ - \text{جب لا لا} - ۱ - لا$$

$$۳۰ - \sqrt{لا-۱} + \text{لوک} (لا+۱-لا) - ۱$$

$$۳۱ - \sqrt{لا+۲} + \frac{1}{2} \text{ لوک} (لا+۱) + \sqrt{لا+۲}$$

$$۳۲ - \sqrt{لا-۲} + \frac{1}{4} \text{ جب} \left(\frac{۱-لا}{2} \right)$$

$$۳۳ - \text{جب} \left(\frac{۱-لا}{3} \right) - ۳۴ - \frac{\sqrt{لا-۱}}{۱+لا} - ۳۵ - \frac{\sqrt{لا-۱}}{۱-لا}$$

$$۳۶ - \sqrt{\frac{لا-۱}{لا+۱}} - ۳۷ - \sqrt{\frac{لا+۱}{لا-۱}} - ۳۸ - \frac{1}{2} \text{ لوک} \left(\frac{لا}{۱+لا} \right)$$

$$۳۹ - \frac{1+n}{2n+1} - ۴۰ - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \text{ لوک (جب } ۱+n \text{ + جم } ۱) \text{}$$

$$۴۱ - \frac{5}{8} - \frac{1}{8} \text{ لوک (جب } ۲+n \text{ + جم } ۱) \text{}$$

$$۴۲ - \frac{\pi}{4} (۱) \quad \frac{\pi}{2} (۲) \quad \frac{\pi}{4} (۳)$$

$$(۴) \quad \frac{\pi}{r-1} \text{ اگر } r > ۱ \text{ اور } \frac{\pi}{1-r} \text{ اگر } r < ۱$$

$$(۵) \text{ جب } \frac{e}{e} \quad (۶) \quad \frac{\pi}{1-1/2} \quad (۷) \quad \frac{1}{2} \text{ لوک } ۳$$

$$۴۳ - \frac{\pi}{2} (۱) \quad \frac{\pi}{2} - (۲) \quad ۴۵ - \frac{8}{5}$$

$$۴۶ - \text{ہر ایک} = \frac{1}{3} - ۴۷ - \frac{1}{4} (۲+n \text{ + ب } ۱) \pi$$

مشق ۳، صفحہ ۳۸

$$۱ - (۱+n) \text{ تو } ۲ - (۱+n+۲+۳+۴+۵) \text{ تو } ۳ - \text{جب } ۱+n \text{ لا جم } ۱$$

$$۴ - \text{لا جب } ۱+n \text{ + جم } ۱$$

$$۵ - \frac{1}{2} \text{ لا جم } ۲+n \text{ + لا جب } ۲+n \text{ لا جم } ۱ - ۶ - \text{لا جب } ۲+n \text{ لا جب } ۲+n \text{ لا جم } ۱$$

$$۷ - \frac{1}{1+n} \text{ لوک } ۱ - \frac{1}{1+n} \text{ (لوک } ۱) - ۸ - \frac{1}{2}$$

$$۹ - \frac{1}{2} \text{ تو } \frac{1}{2} \text{ تو (جم } ۲+n \text{ - جب } ۲+n \text{ لا)}$$

$$۱۰ - \frac{1}{1+n} - ۱۱ - \frac{1}{2} \text{ تو } ۱۲ - \text{لا جب } ۱+n \text{ + لا } ۱ - \text{لا}$$

$$۱۳ - \text{لا مس } ۱ - \frac{1}{2} \text{ لوک } (۱+n)$$

$$۱۴ - \frac{1}{2} \text{ لا جب } ۱ - \frac{1}{2} \text{ جب } ۱+n \text{ + لا } \frac{1}{2} \text{ لا } ۱ - \text{لا}$$

- ۱۵- $\frac{1}{4} (1 + \sqrt{1}) - \sqrt{1} - \frac{1}{4}$
- ۱۶- $\frac{1}{4} (1 - \sqrt{1}) + \sqrt{1} + \frac{1}{4}$ جب $\frac{1}{4}$
- ۱۷- $\frac{1}{4} (1 + \sqrt{1}) + \sqrt{1} + \frac{1}{4}$ جب $\frac{1}{4}$
- ۱۸- $\frac{1}{4} (1 - \sqrt{1}) + \sqrt{1} + \frac{1}{4}$ جب $\frac{1}{4}$
- ۱۹- $\frac{1}{4} (1 + \sqrt{1}) + \sqrt{1} + \frac{1}{4}$ جب $\frac{1}{4}$
- ۲۰- $\frac{1}{4} (1 - \sqrt{1}) + \sqrt{1} + \frac{1}{4}$ جب $\frac{1}{4}$
- ۲۱- $\frac{1}{4} (1 + \sqrt{1}) + \sqrt{1} + \frac{1}{4}$ جب $\frac{1}{4}$
- ۲۲- $\frac{1}{4} (1 - \sqrt{1}) + \sqrt{1} + \frac{1}{4}$ جب $\frac{1}{4}$
- ۲۳- $\frac{1}{4} (1 + \sqrt{1}) + \sqrt{1} + \frac{1}{4}$ جب $\frac{1}{4}$
- ۲۴- $\frac{1}{4} (1 - \sqrt{1}) + \sqrt{1} + \frac{1}{4}$ جب $\frac{1}{4}$
- ۲۵- $\frac{\pi}{4} - \frac{13}{15} + \frac{\pi}{254} - \frac{2}{35} + \frac{\pi}{254} - \frac{5}{14} + \frac{\pi}{254}$
- ۲۶- $\frac{1}{4} (1 - \sqrt{1}) + \sqrt{1} + \frac{1}{4}$ جب $\frac{1}{4}$
- ۲۷- $\frac{1}{4} (1 + \sqrt{1}) + \sqrt{1} + \frac{1}{4}$ جب $\frac{1}{4}$
- ۲۸- $\frac{1}{4} (1 - \sqrt{1}) + \sqrt{1} + \frac{1}{4}$ جب $\frac{1}{4}$
- ۲۹- $\frac{1}{4} (1 + \sqrt{1}) + \sqrt{1} + \frac{1}{4}$ جب $\frac{1}{4}$
- ۳۰- $\frac{1}{4} (1 - \sqrt{1}) + \sqrt{1} + \frac{1}{4}$ جب $\frac{1}{4}$

۴۱ - (ر-و) قطع

مشق ۴ صفحہ ۵۵

$$-۱ \quad \text{لوک (۲+لا) } - \frac{۱}{۴} \text{ لوک (۱+لا) } - \frac{۱}{۳} \text{ لوک (۲+لا) } - \frac{۱}{۳}$$

$$-۲ \quad ۱۵ \text{ لا} - ۵ \text{ لوک (لا-۱) } + ۸۰ \text{ لوک (لا-۲) } (۴-۲)$$

$$-۳ \quad \frac{۱}{(۱+لا)} \frac{۱}{(۲+لا)} \frac{۱}{(۳+لا)} - \frac{۱}{۲} \frac{۱}{(۱+لا)} + \frac{۱}{۴} \frac{۱}{(۱+لا)} \text{ لوک (لا-۱)}$$

$$-۵ \quad \frac{۱}{لا} + \frac{۱}{لا} + \frac{۱}{لا} \text{ لوک (لا-۱)}$$

$$-۶ \quad \frac{۱}{۱۶} \frac{۱}{(لا+۱)} - \frac{۱}{۱۶} \frac{۱}{(لا-۱)} + \frac{۳}{۱۶} \left(\frac{۱}{لا+۱} + \frac{۱}{لا-۱} + \frac{۱}{لا} \right) \text{ لوک (لا-۱)}$$

$$-۷ \quad \frac{۱}{۴} \frac{۱}{(لا-۱)} - ۸ \frac{۲}{۳} \text{ لوک (لا+۱)} + \frac{۱}{۴} \text{ لوک (لا-لا+۱)} + \frac{۱}{۳۲} \text{ سن} \frac{۱-لا}{۳۲}$$

$$-۹ \quad \frac{۱}{۳} \text{ لا} - \frac{۱}{۳} \text{ سن} \frac{لا}{۳}$$

$$-۱۰ \quad لا + \text{لوک (لا-لا+۱)} + \frac{۲}{۳۲} \text{ سن} \frac{۱-لا}{۳۲}$$

$$-۱۱ \quad \frac{۲}{۳} \text{ سن} \frac{لا}{۳۲} + \frac{۱}{۴} \text{ لوک (لا-۱)}$$

$$-۱۲ \quad \frac{۱}{(ب-ب)} \left(\frac{۱}{ب} \text{ سن} \frac{لا}{ب} - \frac{۱}{ب} \text{ سن} \frac{لا}{ب} \right)$$

$$-۱۳ \quad \frac{۱}{(ب-ب)} \text{ لوک (لا+ب)} - \frac{۱}{(ب-ب)} \text{ سن} \frac{لا}{ب} - \frac{۱}{(ب-ب)} \text{ سن} \frac{لا}{ب}$$

$$-۱۵ \quad \frac{۱}{۴} \text{ لوک (لا-۱)} - \frac{۱}{۸} \text{ لوک (لا+۱)} - \frac{۱}{۲} \text{ سن} \frac{لا}{۴} + \frac{۱}{۴} \frac{۱}{(لا+۱)}$$

$$-۱۶ \quad \frac{۱}{۳۲} \text{ لوک (لا+لا+۱)} + \frac{۱}{۳۲} \text{ سن} \frac{لا}{۳۲} + \frac{۱}{۳۲} \text{ سن} \frac{لا}{۳۲} + \frac{۱}{۳۲} \text{ سن} \frac{لا}{۳۲}$$

$$-۳۲ \quad \frac{1}{12} - \frac{1}{12} \sqrt{1-1} + \frac{1}{2} \text{ لوک } (1 + \sqrt{1-1})$$

$$-۳۳ \quad \frac{1}{12} \sqrt{1+1} \left\{ \frac{1}{5} (1+1) - \frac{1}{3} (1+1) \right\}$$

$$-۳۴ \quad \frac{2}{25} (1 + \sqrt{1-1}) - \frac{2}{15} (1 + \sqrt{1-1})$$

$$-۳۵ \quad \frac{(1-1) - \frac{2}{3} (1-1)}{\frac{2}{3} (1+1)} \quad \frac{(1-1) + 1}{\sqrt{1-1}}$$

$$-۳۶ \quad \frac{1}{12} \text{ لوک } \frac{1 + \sqrt{1-1}}{1 + \sqrt{1-1}} + \frac{1}{12} \text{ است } (1-1)$$

$$+ \frac{1}{12} \text{ است } (1 + \sqrt{1-1})$$

باب دوم

مشق ۵، صفحہ ۶۶

$$-۱ \quad \frac{1}{\sqrt{1+1}} \quad -۲ \quad \frac{1}{\sqrt{1+1}} \quad -۳ \quad \pi$$

$$-۴ \quad \frac{\pi^3}{914} \quad -۵ \quad \frac{\pi^5}{14} \quad -۶ \quad \pi$$

$$-۷ \quad \pi \quad -۸ \quad \frac{\pi (1-1)}{8} \quad -۹ \quad \frac{\pi}{\sqrt{1-1}}$$

$$-۱۰ \quad \frac{\pi}{12} \quad -۱۱ \quad \frac{\pi (1+1)}{12}$$

$$۱۲- (ز-سز) / ز \quad ۱۳- \frac{1}{ز} \quad ۱۴- \frac{1}{ز} - \frac{1}{ز+۱} \quad ۱۵- \frac{1}{ز} \quad ۱۶- \frac{1}{ز} - \frac{1}{ز+۱}$$

$$۱۷- \frac{1}{ز} \quad ۱۸- \frac{1}{ز} \quad ۱۹- \frac{1}{ز} \quad ۲۰- \frac{1}{ز} \quad ۲۱- \frac{1}{ز} \quad ۲۲- \frac{1}{ز}$$

$$۲۳- \frac{1}{ز} \quad ۲۴- \frac{1}{ز} \quad ۲۵- \frac{1}{ز} \quad ۲۶- \frac{1}{ز} \quad ۲۷- \frac{1}{ز} \quad ۲۸- \frac{1}{ز}$$

مشق ۶ صفحہ ۷۶

$$۱- \frac{1}{ز} \quad ۲- \frac{1}{ز} \quad ۳- \frac{1}{ز} \quad ۴- \frac{1}{ز} \quad ۵- \frac{1}{ز} \quad ۶- \frac{1}{ز}$$

$$۷- \frac{1}{ز} \quad ۸- \frac{1}{ز} \quad ۹- \frac{1}{ز} \quad ۱۰- \frac{1}{ز} \quad ۱۱- \frac{1}{ز} \quad ۱۲- \frac{1}{ز}$$

$$۱۳- \frac{1}{ز} \quad ۱۴- \frac{1}{ز} \quad ۱۵- \frac{1}{ز} \quad ۱۶- \frac{1}{ز} \quad ۱۷- \frac{1}{ز} \quad ۱۸- \frac{1}{ز}$$

$$۱۹- \frac{1}{ز} \quad ۲۰- \frac{1}{ز} \quad ۲۱- \frac{1}{ز} \quad ۲۲- \frac{1}{ز} \quad ۲۳- \frac{1}{ز} \quad ۲۴- \frac{1}{ز}$$

$$۲۵- \frac{1}{ز} \quad ۲۶- \frac{1}{ز} \quad ۲۷- \frac{1}{ز} \quad ۲۸- \frac{1}{ز} \quad ۲۹- \frac{1}{ز} \quad ۳۰- \frac{1}{ز}$$

$$۳۱- \frac{1}{ز} \quad ۳۲- \frac{1}{ز} \quad ۳۳- \frac{1}{ز} \quad ۳۴- \frac{1}{ز} \quad ۳۵- \frac{1}{ز} \quad ۳۶- \frac{1}{ز}$$

$$۳۷- \frac{1}{ز} \quad ۳۸- \frac{1}{ز} \quad ۳۹- \frac{1}{ز} \quad ۴۰- \frac{1}{ز} \quad ۴۱- \frac{1}{ز} \quad ۴۲- \frac{1}{ز}$$

$$۴۳- \frac{1}{ز} \quad ۴۴- \frac{1}{ز} \quad ۴۵- \frac{1}{ز} \quad ۴۶- \frac{1}{ز} \quad ۴۷- \frac{1}{ز} \quad ۴۸- \frac{1}{ز}$$

$$۴۹- \frac{1}{ز} \quad ۵۰- \frac{1}{ز} \quad ۵۱- \frac{1}{ز} \quad ۵۲- \frac{1}{ز} \quad ۵۳- \frac{1}{ز} \quad ۵۴- \frac{1}{ز}$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \right)$$

$$\frac{1}{12} - \frac{1}{24} = \frac{1}{24}$$

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{8} = \frac{1}{8}$$

مشق ۹ صفحہ ۹۰

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$$

باب سوم

مشق ۹ صفحہ ۱۳۰

$$1 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \right)$$

$$2 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \right)$$

$$3 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \right)$$

$$4 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \right)$$

$$5 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \right)$$

$$6 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \right)$$

$$7 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \right)$$

باب ہشتم

- مشق ۱، صفحہ ۲۸۴

- ۱- $ما = لا + م$ (۱+ لا ما) جہاں مستقل ہے۔
- ۲- جبے 'ما' جبے 'لا' = م ۳- $ما = (ا-م ما) (لا+م)$
- ۳- $لا ما = م (۲+ما لا)$ ۵- $ما = م (لا-)$ $\frac{1}{م}$
- ۴- $(لا- ۳+ما ۱) (لا+ ۲-ما ۲) = م$
- ۶- $لا + م + \frac{ع+ج}{ر}$ درجہاں $ر = (ا+م ب) ع+ا+ج+ب+گ$
- ۸- $ب+ما ۲+لا ۱+ما- ف لا- گ لا+ ۲+ج ما = م$
- ۹- $ما = (لا+م) تو$ ۱۰- $ما = \frac{1}{ف} + لا + \frac{م}{لا}$
- ۱۱- $ما = (جبے 'لا+م) / (لا- ۱- ۱۲- (ا+لا) ما = \frac{1}{ف} لا+م$
- ۱۳- $ما = م تو + \{ (ج+ب لا+ج) + ب جب (ب لا+ج) \} / (ا+ب)$
- ۱۴- $\frac{1}{ما} = \frac{۵}{ف} لا+م لا$ ۱۵- $\frac{لا}{ما} = م+م+لوک لا$
- ۱۶- $لا+ ۲ لا+ما- ما- ۲ لا+ ۲- ب+ما = م$
- ۱۷- $(ما- ملا) = ۲ = ۲م+ب$ ' $\frac{لا}{ا} + \frac{ما}{ب} = ۱$
- ۱۸- $ما = ملا+م$ ' $۲+ما ۴ لا =$ ۱۹- $ما = ملا+م$

$$۳۵ - (۱) \text{ ب م ا} = \frac{1}{p} \text{ و } (لا - لا' ۲ لا + لا' ۲ لا)$$

$$(۲) \text{ ب م ا} = \frac{1}{p} \text{ و } لا' (ل - لا')$$

$$(۳) \text{ ب م ا} = \frac{1}{p} \text{ و } لا' (لا - لا' ۲ لا + لا' ۲ لا)$$

$$۳۶ - \text{م ا} = (ا ج م لا + ب ج ب ن لا) / لا' \text{ م ا} = \text{ب (ج ب ن لا) / لا}$$

$$۳۷ - (۱) \text{ م ا} = (ا + \frac{ب}{p} + لا') \text{ م ا} = (ا + \frac{ب}{p} + لا' + ج لا - لا' ل و ک لا)$$

$$(۳) \text{ م ا} = (لا' + \frac{ب}{p} - \frac{1}{p} لا)$$

$$۳۸ - \text{م ا} = (ا ج م ن ل و ک لا) + \text{ب ج ب ن ل و ک لا}$$

$$۳۹ - \text{م ا} = (ا ر + \frac{ب}{p}) - ۴۲ - و = (ا ل و ک ر + ب)$$

$$۴۰ - (ع ف م ا) + ۱ = ۲ / (م - م ا')$$

$$۴۱ - \text{م ا} = \frac{1}{x} لا' + (لا + \frac{ب}{p})$$

باب نہم

مشق ۱۸ صفحہ ۳۰۹

$$۳ - (۱) لا < ا' \text{ م ا} = \frac{\pi}{p} \text{ و } لا > ا' \text{ م ا} = \frac{\pi}{p} - \frac{1}{p} لا' - ا' > لا' \text{ م ا} = \frac{\pi}{p}$$

$$لا > ا' \text{ م ا} = \frac{\pi}{p}$$

$$(۲) لا < ا' \text{ م ا} = \frac{\pi}{p} \text{ و } لا > ا' \text{ م ا} = \frac{\pi}{p} - \frac{1}{p} لا' - ا' > لا' \text{ م ا} = \frac{\pi}{p}$$

$$۲ - لا > ا' \text{ م ا} = \frac{\pi}{p} - \frac{1}{p} لا' - ا' > لا' \text{ م ا} = \frac{\pi}{p}$$

$$-۲۰ \quad \text{لا} < ۱۲ \text{، مآ} = \frac{\pi^۳}{۲} \text{، } ۰ < \text{لا} > ۱۲ \text{، مآ} = \frac{\pi}{۲} \text{، } ۰ < \frac{\pi}{۲} < ۱۲ > \text{لا} \text{، مآ} = \frac{\pi^۳}{۲} - \frac{\pi}{۲}$$

باب دہم

مشق ۲۰ صفحہ ۳۸۱

$$۱ - \left(\frac{۲}{\pi} \left(\text{جب لا} + \frac{\text{جب لا}}{۳} + \frac{\text{جب لا}}{۵} + \dots \right) \right)$$

$$۲ - \frac{۲}{\pi} \left(\text{ج لا} + \frac{۱}{۳} \text{جب لا} + \frac{۱}{۵} \text{جب لا} + \dots \right)$$

$$۳ - \left(\frac{۲}{\pi} + \frac{\pi^۳}{۸} \left(\dots - \frac{\text{جم لا}}{۲۳} + \frac{\text{جم لا}}{۲۵} - \frac{\text{جم لا}}{۲۷} \right) \right)$$

$$- \frac{۲}{\pi} \left(\dots - \frac{\text{جم لا}}{۲۷} + \frac{\text{جم لا}}{۲۹} - \frac{\text{جم لا}}{۳۱} \right)$$

$$۴ - \left(\frac{۱۲}{\pi} + \frac{۱۳}{۸} \left(\dots - \frac{۱}{۲۳} \text{جم لا} + \frac{۱}{۲۵} \text{جم لا} - \frac{۱}{۲۷} \text{جم لا} \right) \right)$$

$$- \frac{۱۲}{\pi} \left(\dots - \frac{۱}{۲۷} \text{جم لا} + \frac{۱}{۲۹} \text{جم لا} - \frac{۱}{۳۱} \text{جم لا} \right)$$

$$۵ - \left(\frac{۱۴}{\pi} - \frac{۱۳}{۲} \left(\dots + \frac{۱}{۲۵} \text{جم لا} + \frac{۱}{۲۳} \text{جم لا} + \frac{۱}{۲۱} \text{جم لا} \right) \right)$$

$$۶ - \left(\frac{۱۲}{\pi} - \frac{۱۳}{۲} \left(\text{ج لا} + \frac{۱}{۳} \text{جب لا} + \frac{۱}{۵} \text{جب لا} + \dots \right) \right)$$

$$+ \frac{۱۳}{\pi} \left(\text{جب لا} - \frac{۱}{۲} \text{جب لا} + \frac{۱}{۳} \text{جب لا} - \frac{۱}{۴} \text{جب لا} + \dots \right)$$

$$-۷ \quad \left(\dots + \frac{\text{جم } ۲۵}{۵ \times ۵} + \frac{\text{جم } ۲۴}{۵ \times ۴} + \frac{\text{جم } ۲۳}{۴ \times ۱} \right) \frac{۲}{\pi} - \frac{۲}{\pi}$$

$$-۸ \quad \left(\dots - \frac{\text{جم } ۲۵}{۵} + \frac{\text{جم } ۲۴}{۴} - \frac{\text{جم } ۲۳}{۳} \right) \frac{۲}{\pi} + \frac{۲}{۱۲}$$

$$+ \left(\dots - \frac{\text{جم } ۲۵}{۵} + \frac{\text{جم } ۲۴}{۴} - \frac{\text{جم } ۲۳}{۳} \right) \frac{۲}{\pi}$$

$$-۹ \quad \left(\dots + \frac{\text{جم } ۲۵}{۵ \times ۳} + \frac{\text{جم } ۲۴}{۴ \times ۲} + \frac{\text{جم } ۲۳}{۳ \times ۱} \right) ۲ - \frac{۱}{۲} \text{جم } ۲۵$$

$$-۱۰ \quad \left(\text{جب } \frac{\pi}{۲} \text{ جب } \frac{\pi}{۲} + \frac{۱}{۲} \text{ جب } \frac{\pi}{۲} \text{ جب } \frac{\pi}{۲} \right) \frac{۲}{\pi}$$

$$-۱۲ \quad (۱) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{۲}{\pi} + \frac{۱}{\pi} \frac{۲}{۱} \text{جم } ۲۵$$

$$(۲) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{۲}{\pi} (۱ - \text{جم } ۲۵) \text{جب } ۲۵$$

۱۳۔ اگر سلسلہ یکساں طور پر مستحق ہو جبکہ لا وقفہ (۰، ۱) کے اندر ہو

تو یہ باسانی ثابت ہو سکتا ہے کہ ہر لا کے لئے یہ یکساں طور پر مستحق ہے اور ایک جفت دوری تفاعل مثلاً فہ (لا) کو تعبیر کرتا ہے جس کا دور ۲ لہ ہے۔ فہ (لا) کو وقفہ (۰، ۱) کے درمیان جیب التمام سلسلہ میں پھیلاؤ۔ سر معلوم کرنے کے لئے ہم رقم برقم مکمل کر سکتے ہیں۔ جیب التمام سلسلہ فہ (لا) کو ہر لا کے لئے تعبیر کرتا ہے۔

سلسلہ

فہرست اصطلاحات

تکملی احصاء (گبین) حصہ دوم

Abscissa	فصلہ
Absolute convergence	مطلق استدقاق
Adiabatic	حرنا گذار
Amplitude	حیطہ، سمعت
Anchor ring	تنگرہ چٹلا
Approximation	تقرب
Arbitrary constant	اختیاری مستقل
Argument	وجہ (دلیل)
Asymptote	متقارب
Battery	موجیہ
Bending of beams	شہتیروں کا جھکاؤ
Bessel's function	بیسل کا تفاعل
Calculus	احصاء
Calculus of variations	احصاء و تغیرات

Canonical form	صورت آئینی
Cardioid	خط صنوبری
Catenary	زنجیرہ
Circuit	حلقہ، دورہ
Clairaut's form	کلیریوی صورت
Closed curves	بند منحنی
Commutative Law	قانون تبدیلی (مبادلہ)
Complementary function	متمم تفاعل
Complete integral (differential)	پورا آئینہ (تفریقہ)
Complete primitive	کامل ابتدائی
Concavity	تقعیر، گہرائی
Conditionally convergent	شرطاً مستقر
Conocuneus	خروط قائمہ
Conservative system of forces	قوتوں کا نظام بقائی
Continuity	تسلسل
Convergent	مستقر
Convexity	تحدب، ابھار
Coordinate	محدد
Current coordinates	رواں محدّد
Curvature	انحناء
Curve tracing	منحنیات کی ترسیم
Cusp	قرن
Cycloid	خط تدویر
Deflection	انحراف
Definite integral	محدود یکجملہ

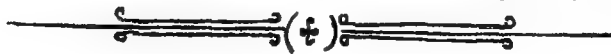
Degree	درجہ
Derivative	مشتق
Differential	تفرقہ، تفرقی
Differential Calculus (equations)	تفرقی احصاء (مساواتیں)
Differentiate	تفرق کرنا
Differentiation	تفرق
Dirichlet's Integral	ڈیرشلے کا کلمہ
Discontinuity	عدم تسلسل
Discontinuous	غیر مسلسل
Discriminant	متمیز
Distributive law	قانون تقسیمی
Double Integral	دوہرہ کلمہ
Eccentric anomaly	خروج المکرز بے قاعدگی
Eccentricity	خروج المکرز
Electromotive force	قوت محرکہ برقی
Electron	برقیہ
Eliminant	حاصل استقاط
Ellipse	قطع ناقص
Ellipsoid	ناقص فضا
Empirical function	امتحانی تفاعل
Entropy	ناکارگی
Envelope	لفاف
Epicycloid	برتدویر
Equiangular spiral	مساوی الزوایہ لولبی
Equilateral Hyperbola	قائم قطع زائد (قائم زائد)

Exact Equation	ٹھیک، حاضر یا تیار مساوات
Evolute	ہر محاسبہ
Explicit (function)	تصریحی (تفاعل)
Flexural rigidity	خمیدگی کی استواری
Fourier's series	فوریر یا فورسے کا سلسلہ
Fluxion	رہانی
Flux (fluent)	ہسٹو (ہستے والا)
Folium of Decartes	کارٹیزی پتی
Gamma function	گاما تفاعل
Generalised integral	تعمیمی یکمسلہ
Gradient	ڈیجھال
Gyroscope	گردش نما
Gyrostatic Pendulum	گردشی تقاص
Harmonic curve	موسیقی شخصی
Hyperbola	قطع زائد
Hyperbolic substitution	زائدی ابدال
Hypocycloid	درتدویر
Impedance	مقاومت
Indefinite integral	نامحدود یکمسلہ
Indeterminate forms	غیر معین صورتیں
Inductance	امالیت
Inertia	جمود
Infinite limits	لامتناہی حدود
Infinite series	لامتناہی سلسلہ
Infinite simal	صغاری (صغاریات)

Inflexion	انعطاف
Integral	تکامل
Integral Calculus	تکاملی احصا
Integrand	تکامل
Integrate	تکامل کرنا
Integration	تکامل
Integrating factor	تکامل جزو ضروری
Integration by parts	تکامل بالخصص
Integrapph	تکاملی مرسوم
Intrinsic equation	ذاتی مساوات
Involute	دریچہ منطبق
Irrational function	غیر منطبق
Irreversible (process)	غیر انقلاب پذیر (عمل)
Lemniscate	آتشیرن کی شکل کا منحنی
Linear Equations	خطی مساواتیں
Lituus	عصائی شکل کا منحنی
Loop	حلقہ
Lower Limit	نیچلی حد
Maclaurin's theorem	سکالارن کا مسئلہ
Mean value Theorem	اوسط قیمت کا مسئلہ
Moment of Inertia	جمود کا معیار
Monotonic	یک رنگ
Non Convergent	غیر مستقر
Node	عقدہ
Octant	شمن

Operator	عال
Order	رتبہ
Ordinary (differential equations)	معمولی (تفرقی مساواتیں)
Ordinate	مفسین
Parabola	قطع مکانی
Paraboloid	مکانی منہا
Parallel curves	متوازی منحنی
Parameter	متبادل
Partial (differentiation, differential equations)	جزوی (تفرق، تفرقی مساواتیں)
Partial fractions	جزوی کسور
Particular integral	خاص تکملہ
Pedaicurve	پائین منحنی
Planimeter	سطح پیماس
Potential	تقوہ
Power Series	قوتی سلسلے
Primitive	ابتدائی
Prolate spheroid	لمبوتر اکروہ منہا
Quadratic function	دو درجہ تفاعل
Range of integration	تکملہ کی وسعت یا سمیت
Rate	شرح
Rectification	تخطیط
Raduction formulæ	تحویلی ضابطے
Remainder	باقی
Repulsion	دفع

Rigid dynamics	استواری حرکیات
Self inductance	ذاتی امالیت
Semicubical Parabola	نیم مکعبی مکانی
Simultaneous equations	ہمزا مساواتیں
Singular solution	نادرجل
Space rate	مکانی شرح
Spiral	لولب، لولبی
Standard forms	معیاری صورتیں
Stationary value	قائم قیمت
Steps of a (moving point)	قدم (متحرک نقطہ کے)
Successive (differentiation reduction	متواتر تفرق تحويل
Taylor's Theorem	ٹیلر کا مسئلہ
Time rate	زمانی شرح
Total derivative	پورا مشتق
Transcendental	ماورائی
Triple Integral	تہر تکملہ
Turning (point, value)	موزیر (کا نقطہ، کی قیمت)
Upper limit	اوپر کی حد
Uniform convergence	یکساں استدفاق
Unlimited (integral, interval)	بلاحد (تکملہ، وقفہ)



[ترقیم جو اس کتاب میں استعمال کی گئی ہے]

$A, B, C, D,$

$a, b, c, d,$

x, y, z

XYZ

α, β, γ

ℓ, m, n

α, ϕ, ψ

ξ, η, ζ

λ, μ, ν

$f(x)$

$F(x)$

$\Phi(x)$

$\sin x$

$\cos x$

$\tan x$

$\cot x$

$\sec x$

$\operatorname{cosec} x$

$\sin^{-1} x, \cos^{-1} x, \tan^{-1} x,$

$\cot^{-1} x, \sec^{-1} x, \operatorname{cosec}^{-1} x,$

ا ب ج د

ا ب ج د

ا ب ج د

ا ب ج د

ا ب ج د

ا ب ج د

ا ب ج د

ا ب ج د

ا ب ج د

ف (ا)

فا (ا)

فد (ا)

ج ب ا

ج ب ا

م ب ا

م ب ا

ق ب ا

ق ب ا

ج ب ا ج ب ا ج ب ا

م ب ا ق ب ا ق ب ا

Sine hyperbolic ($\sinh x$)	نامدی جیب (جنرلا)
$\sinh x, \cosh x, \tanh x$	جنرلا، جنرلا، منرلا
$\coth x, \operatorname{sech} x, \operatorname{cosech} x$	منرلا، قنرلا، قنرلا
$\sinh^{-1} x, \cosh^{-1} x, \tanh^{-1} x$	جنرلا، جنرلا، منرلا
$\coth^{-1} x, \operatorname{sech}^{-1} x, \operatorname{cosech}^{-1} x$	منرلا، قنرلا، قنرلا
123 57	۱۲۳۵۷
π	π
Exponent (e)	قوت ناما (قو) یا صرف (و)
e^x	قو
a^x	لا
$\log_e x$	لوگ ولا [یا صرف لوگ لا]
$\log_{10} x$	لوگ لا
ϵ	سہ یا صہ
∞	∞
Limit, Lt	انتہا، نہا
Lt $f(x) = A$	نہا ف (لا) = A
S_{n+1}	س
S	س
time (t)	وقت (ت)
arc (s)	قوس (س)
differential (d)	فرق (فر)

differential coefficient $\left(\frac{dy}{dx}\right)$

تفریق سر (فرما)

$$\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n}$$

فرما، فرما، فرما
فرلا، فرلا، فرلا

Partial differential Coefficient $\frac{\partial}{\partial x}$

جزوی تفریق سر

$$\frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 x}{\partial x \partial y}, \dots$$

جف ما، جف ما، جف ما
جف لا، جف لا، جف لا

$$\delta x, \delta y, \delta z$$

مف لا، مف ما، مف می

$$dx, dy, dz$$

فرلا، فرما، فرمی

$$f'(x), f''(x)$$

ف لا، ف لا، ف لا

Operator (D)

عال تفریق (عفا)

$$Dy, D^2y$$

عفا ما، عفا ما، عفا ما

$$\nabla^2 u$$

لفا

Summation (S)

مجموعہ (م)

$$\int_a^b f(x) dx$$

ف لا، ف لا، ف لا

$$\iint f(x, y) dx dy$$

م ف لا، م ف لا، م ف لا

$$[D^{-1}f(x)]_a^b$$

عفا ف لا، عفا ف لا

$$\int_a^\infty f(x) dx$$

ف لا، ف لا، ف لا

Gamma Function $\Gamma(n)$

گاما فاعل جفا (ن)

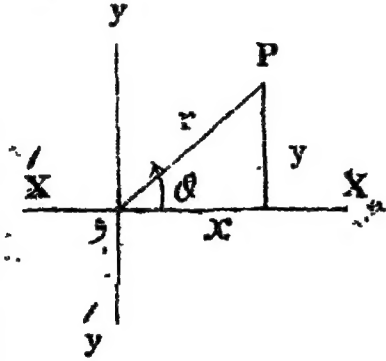
(Beta Function) $B(m, n)$

بیتا فاعل با (م، ن)

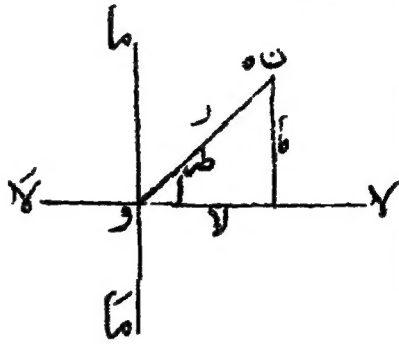
Bessel function $J_r(x)$

Sum Σ

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos nx$$



بیسل کا تفاعل ہے (لا)
حاصل جمع حج حج یا حج
حج لہن جم ن لا



Velocities u, v, w

Kinetic energy E

Work K

Potential V

Pressure P

Volume V

رفتاریں u, v, w
توانائی یا حرکت E
کام K
توتہ V
دباؤ P
حجم V